第15卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 15, No. 4
1991年4月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Apr., 1991

8维爱因斯坦-杨-密尔斯理论的量子宇宙

苏 秉 李新洲
(华东理论物理所,上海 200237)

摘 要

本文研究了一个8维 Einstein-Yang-Mills 量子宇宙. 关于宇宙边界条件的 Hartle-Hawking 假设也被扩充到具有物质场的8维理论. 本文得到了一类具有 inflation 特性的超微空间波函数.

一、引 言

近几年来，具有物质场的 Kaluza-Klein 宇宙学引起了人们广泛的兴趣[1-3]. 对于 $d=6$，Einstein-规范理论的稳定性已有了完整的结果[4]. Frampton 和 Yamamoto[5] 研究了在任意偶数维下规范和引力手征反常自由的 $SU(N)$ 可能的费米子表示，并给出了 $SU(N)$ 完全反对称张量情形下所有可能的表示. 在这一研究的基础上,我们讨论了单个瞬子诱导的八维自发紧致化的经典宇宙学模型[6]. 在4维情形下,这一模型可约化到 Georgi 的三代 $SU(11)$ 模型[7]. 在我们的模型中，宇宙在"标准大爆炸"前,先经历"首次大爆炸"和 "inflation" 阶段[1,6].

众所周知,宇宙学需要研究时空的整体性质. 当我们考虑到宇宙的初态时,就会出现无限大曲率和密度的奇性态. 解决这一问题的方案之一是 Hartle 和 Hawking 所提出来的[8],他们发展了旧量子宇宙论[9]. 新理论有两个主要的特性，首先是新理论使用了路径积分形式，其次是对度规及其物质场相选取了某种边界条件. Hartle 和 Hawking 提出了目前最流行的所谓"无边界"的边界条件，这可以由在所有闭曲面上的路径积分形式给出. 在经典宇宙的奇性处,量子宇宙的波函数可以有好的定义. 在各种特殊模型,包括高维模型中寻找具有 inflation 特性的波函数是令人感兴趣的.

为此，首先应当将 Hartle-Hawking 假设扩充到高维理论. 吴忠超首先考虑了在纯引力的 Kaluza-Klein 理论中的扩充[10]，Halliwell 考虑了在6维的 Einstein-Maxwell 理论和6维超引力中的扩充[11],我们也研究了在10维 Kalb-Ramond 理论中的扩充[12]. 在本文中，我们将研究一个8维的量子宇宙模型，这一模型将具有二类动力学场：引力子 g_{MN} 和杨-Mills 场 $F^{a}_{\mu\nu}$. 对于宇宙边界条件的 Hartle-Hawking 假设将扩充到8维 Ei-

本文1990年7月6日收到.

nstein-杨-Mills 理论. 我们计算了超微空间波函数，其中一类波函数对应于宇宙的 inflation 特性，即紧致的4维仍然保持小尺度，而其余的维数迅速膨胀的宇宙波函数. inflation 行为可以消除宇宙学的视界问题、平坦性问题和磁单极问题，所以这些波函数是令人感兴趣的.

二、Wheeler-DeWitt 方程

量子宇宙的出发点之一是选择度规，这一度规对应于我们所希望研究的特殊的经典宇宙. 在本文中，我们考虑如下线元，

$$\begin{aligned} g_{MN}dz^M dz^N &= l^2[-N^2(t)dt^2 + R_3^2(t)d\Omega_3^2 + R_4^2(t)d\Omega_4^2] \\ &= -N^2(t)l^2dt^2 + h_{IJ}dx^I dx^J \\ &= -N^2(t)l^2dt^2 + h_{ij}dx^i dx^j + h_{mn}dy^m dy^n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 N 是可以任意选择的延迟函数，这对应时间坐标的选取，指标分裂为 $z^M = (x^\mu, y^m)$; $M, N = 0, 1, \cdots, 7$; $I, J = 1, \cdots, 7$; $\mu, \nu = 0, \cdots, 3$; $i, j = 1, 2, 3$; $m, n = 4, \cdots, 7$. 长度因子 l 是由8维引力与宇宙常数表示的: $l^2 = G\Lambda^2/48\pi^3$. 可以看出 $l \sim m_p^{-1}$，即 l 具有普朗克长度量级.

8维的 Einstein-杨-Mills 作用量为

$$\begin{aligned} S = &\frac{1}{16\pi G}\int_M d^8z\sqrt{-{}^{(8)}g}\,(R - 2\Lambda) \\ &+ \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial M} d^7z K h^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\int_M d^8z\sqrt{-{}^{(8)}g}\,F_{MN}F^{MN}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 R 是 Ricci 张量，$K = h^{IJ}K_{IJ}$ 而 K_{IJ} 是第二基本形式.

在 $SU(11)$ 的4维三代模型中，费米子表示应当是

$$[4]_L^{(11)} - [3]_L^{(11)} - [2]_L^{(11)} - [1]_L^{(11)}. \tag{2.3}$$

上述表示是引力反常自由的[7]. 它又可以被写作[5]

$$[4]_L^{(11/3)} + 2[3]_L^{(11/5)} + 3[2]_L^{(11/7)}, \tag{2.4}$$

其中 $[m]_L^{(N/M)}$ 是 $SU(N/M)$ 的超杨盘. 在 $d = 8$ 维时，我们需要 $SU(13)$ 群的费米子表示[5]:

$$[5]_L^{(13/3)} + 2[4]_L^{(13/5)} + 3[3]_L^{(13/7)}. \tag{2.5}$$

具有拓扑 $S^1 \times S^3 \times S^4$ 的真空解为

$$\langle A_n^a\rangle = \frac{2}{e}\frac{\eta_{amn}y^n}{b^2 + y^2},\ \langle A_\mu^a\rangle = 0, \tag{2.6}$$

$$\langle A_M^\alpha\rangle = 0,\ (\alpha \neq a,\ M \neq n)$$

这一真空解具有等于1的瞬子数.

为了讨论问题的方便起见，我们选择新的变量 μ 和 ϕ

$$R_3 = e^{\mu}e^{-\sqrt{2}\phi},\quad R_4 = \frac{3}{2\Lambda l^2}e^{\sqrt{2}\phi}. \tag{2.7}$$

由上述诸式，我们得到约化的拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2} N e^{3\mu} e^{\sqrt{2}\phi} \left[\frac{e^{-2\sqrt{2}\phi}}{N^2} (-\dot{\mu}^2 + \dot{\phi}^2) + e^{-2\mu} - m^2 V(\phi) \right], \tag{2.8}$$

其中

$$V(\phi) = \varepsilon e^{-4\sqrt{2}\phi} - e^{-3\sqrt{2}\phi} + e^{-2\sqrt{2}\phi}, \tag{2.9}$$

ε 是无量纲参数，$\varepsilon = 32\pi^4 l^4/g^2$.

在图 1 中，我们画出了不同 ε 值的势. 当 $\varepsilon < \frac{9}{32}$ 时，$V(\phi)$ 具有局部极小值；当 $\varepsilon = \frac{1}{4}$ 时，$V(\phi)$ 在极小值取零值；当 $\varepsilon = 0$ 时，$V(\phi)$ 只有一个整体的极大值而没有极小值，这对应于瞬子不出现的情形. 我们将选择 $\varepsilon = \frac{1}{4}$ 的模型，这使得有效的 4 维宇宙常数为零.

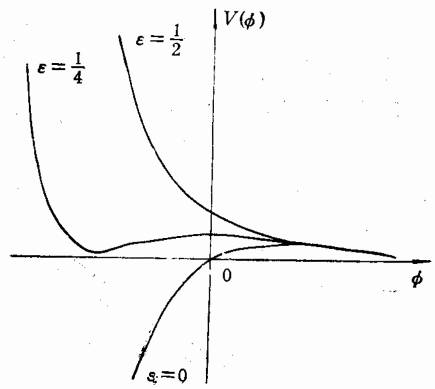

图 1　ε 取不同值时的 $V(\phi)$

体系的哈密顿量为

$$H = \frac{N}{2} e^{-3\mu} [-\pi_\mu^2 + \pi_\phi^2 + e^{-2\mu} - m^2 V(\phi)]. \tag{2.10}$$

由经典约束 $H = 0$，经量子化后就得到了 Wheeler-DeWitt 方程[9]. 当经过一个适当的算符次序选择后[13]，WDW 方程为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + U(\mu, \phi) \right] \Psi(\mu, \phi) = 0, \tag{2.11}$$

其中

$$U(\mu, \phi) = e^{6\mu} m^2 V(\phi) - e^{4\mu}. \tag{2.12}$$

这是在 2 维超微空间上的双曲型方程，按照 Hartle 和 Hawking 的建议[8]，对应于每个 N 的选择，任何满足 WDW 方程的波函数 Φ 描述了宇宙的一个可能的量子态. 为了选取特殊的态，我们采用扩充的 Hartle-Hawking 假设，即波函数定义为紧致 8 维度规和正则物质场上的路径积分

$$\Psi = \int_c d[\mu] d[\phi] \exp(-\tilde{I}). \tag{2.13}$$

其中 $\tilde{I}$ 是欧几里得作用量. $\tilde{I}$ 通过选择 N 为负虚数，而从洛伦兹型作用量 I 中得到，$\tilde{I} = -iI$. 上述路径积分是对超微空间中用欧氏时间 $\tau = iNt$ 描写的路径来积分的.

从 8 维紧致度规的要求，可导出 $\tau = 0$ 时的 a、b 的初始条件. 对于欧氏度规

$$ds^2 = d\tau^2 + R_3^2(\tau) d\Omega_3^2 + R_4^2(\tau) d\Omega_4^2, \tag{2.14}$$

我们应由在 $\tau = 0$ 时的初始条件：

$$\begin{aligned} &R_3 = 0,\ dR_3/d\tau = 1, \\ &R_4 = \text{正常数},\ dR_4/d\tau = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

另一个选择的可能性是 R_3 和 R_4 的位置互换，但由于杨-Mills 场的正则性要求而被排除了. 从初始点 $\tau = 0$ 到一个非常接近于 $\tau = 0$ 的点 (μ, ϕ) 的任何路径的欧氏作用量

可以容易地积分得到

$$\tilde{I}=-\frac{1}{2}e^{2\mu}+\frac{1}{8}m^2e^{4\mu}V(\phi). \tag{2.16}$$

在适当选择测度后，在 $\mu=-\infty$ 附近，(2.13) 式蕴含 $\Psi=e^{-\tilde{I}}$. 对于度规 $ds^2=d\mu^2-d\phi^2$ 的过去零无限曲面 J^-，对应于曲面 $\mu^2=\phi^2$，这是一个可作为确定边界条件的合适的曲面. 由此可以看出，Hartle-Hawking 假设可以用来建立一系列的 WDW 方程的初值问题. 因此，在原则上总可以得到 WDW 方程的数值解. 然而，我们在本文中的主要兴趣是考虑渐近解析解，为此可选择在 $\mu=-\infty$ 附近波函数为

$$\Psi\approx\exp\left[+\frac{1}{2}e^{2\mu}-\frac{1}{8}m^2e^{4\mu}V(\phi)\right], \tag{2.17}$$

并考虑在 J^-的不同区域上 $\Psi\to 0$ 还是 1.

我们首先关心的是：如何决定波函数在哪些区域振荡，在哪些区域指数下降? 事实上，如果常数曲面 U 是类空的，$U>0$ 对应 Ψ 是指数型的，$U<0$ 对应 Ψ 是振荡的；如果常数曲面是类时的，$U>0$ 对应 Ψ 是振荡的，$U<0$ 对应 Ψ 是指数的. U 是正或负的区域是由曲面 $U=0$ 来分开的，而该区域 Ψ 究竟是指数型还是振荡型是通过曲面 $d\mu/d\phi=\pm1$ 来区分的，因为这些曲面把 $U=$常数的曲面分成类空和类时两部分. 上述这些区域都显示在图 2 之中. 在图 2 中，我们看到，当 ϕ 小于 $V(\phi)$ 的极小值点 $\phi_{\min}$ 时，$U=0$ 与 $d\mu/d\phi=-1$ 的曲面几乎重合. 在这两个曲面之间有一个狭小的区域，其中 $U<0$，且是类时的，因而 ϕ 具有振荡解. 而在几乎整个 $\phi<\phi_{\min}$ 区域，Ψ 是指数下降的，这一区域代表着宇宙的初始阶段，Ψ 的性质说明 $V(\phi)$ 对于宇宙半径 $R_3\propto e^{\mu}$ 是个量子力学意义上的势垒.

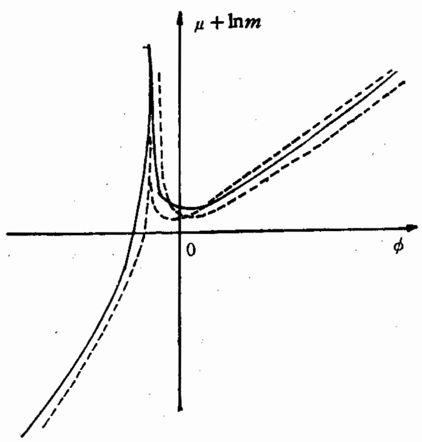

图 2 实线表示 $U=0$ 的曲面，虚线表示曲面由类时到类空或类空到类时的转变. 在 $U<0$ 的大部分区域中 $U=$ 常数的曲面是类空的；在 $U>0$，$\phi<0$ 的区域中，曲面是类时的；在 $U>0$，$\phi>0$ 的大部分区域中，曲面是类空的.

上面我们讨论了波函数的一般行为，下面我们讨论在 $V(\phi)$ 极大值附近 Ψ 的渐近解. 在 $U>0$，ϕ 靠近 $\phi_{\max}$，我们有

$$\Psi\simeq A\exp\left[\frac{1}{3m^2V(\phi)}\right]\exp\left[\frac{-1}{3m^2V(\phi)}[1-e^{2\mu}m^2V(\phi)]^{\frac{3}{2}}\right]. \tag{2.18}$$

当 $e^{\mu}\to 0$ 时，$A\to 1$ 满足边界条件 (2.17).

在 $U<0$ 的区域，利用 WKB 近似方法，Ψ 取如下形式

$$\Psi\approx B\exp\left[\frac{1}{3m^2V(\phi)}\right]\cos\left[\frac{1}{3m^2V(\phi)}[e^{2\mu}m^2V(\phi)-1]^{\frac{3}{2}}-\frac{\pi}{4}\right]. \tag{2.19}$$

因子 B 可以将波函数 Ψ 代入 WDW 方程来决定，在 $\phi\approx\phi_{\max}$ 时，有

$$B\approx e^{-\mu}[e^{2\mu}m^2V(\phi)-1]^{-\frac{1}{4}}. \tag{2.20}$$

三、波函数的物理解释

波函数有一个指数型的区域，在经典近似下对应于一个欧氏 8 维几何．即它限制了标度因子从为零的区域作经典发展．波函数在 $\phi=\phi_{max}$ 附近有一个振荡区域，这可以解释作为标度因子 R_3 在初始 inflation 时间经典解的迭加。

下面我们对振荡型波函数作进一步的讨论．振荡区域的波函数可以用 WKB 近似作解释，

$$\Psi=\mathrm{Re}(ce^{is}),\tag{3.1}$$

其中 s 是一个急变相因子，而 c 则是一个缓变系数． s 满足对应于 WDW 方程的 Hamilton-Jacobi 方程：

$$\left(\frac{\partial s}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial\phi}\right)^2+U(\mu,\phi)=0.\tag{3.2}$$

考虑开始于曲面 $U=0$ 的类空部分的经典轨道，即在 ϕ 接近于 $\phi_{max}=0$ 的区域．在 ϕ_{max} 附近展开 $V(\phi)$，我们能得到该区域 Hamilton-Jacobi 方程的渐近解：

$$s\simeq-\frac{m}{6}e^{3\mu}\left[1-\frac{1}{4}(e^{-\phi}-1)^2\right].\tag{3.3}$$

其中 $e^{-\sqrt{2}\phi}$ 在 $\phi=\phi_{max}$ 等于 1，s 的形式与 (2.19) 式是一致的．波函数 (3.1) 可以看作是满足下述两个一阶方程的经典轨道的迭加：

$$\pi_\mu=\frac{\partial s}{\partial\mu},\quad \pi_\phi=\frac{\partial s}{\partial\phi}.\tag{3.4}$$

从 (3.2)—(3.4) 式，可得

$$\dot{\mu}=\frac{m}{2}\left[1-\frac{3}{4}(e^{-\sqrt{2}\phi}-1)^2\right],\tag{3.5a}$$

$$\dot{\phi}=-\frac{\sqrt{2}}{4}m[e^{-\sqrt{2}\phi}-1]e^{-\sqrt{2}\phi}.\tag{3.5b}$$

如果 ϕ 的初值 ϕ_0 充分接近 ϕ_{max}，那么 $\dot{\phi}$ 的初始值非常小，$\dot{\mu}$ 的初始值约为 $\frac{m}{2}$．从而 $R_3(t)\propto\exp\left(\frac{m}{2}t\right)$，即标度因子具有指数膨胀的形式。

如果 $\phi_0>\phi_{max}$，则据 (3.5) 式，$\dot{\phi}>0$，那么 ϕ 将滑向势的右边，变得很大．对于大的 ϕ，R_3 和 R_4 都将以指数形式膨胀．所以 $\phi_0>\phi_{max}$ 不是物理的初值。

如果 $\phi_0<\phi_{max}$，则 $\dot{\phi}<0$，那么 ϕ 将滑向势的左边．在时间 $t_1=\frac{-1}{m}\ln(\phi_{max}-\phi_0)$ 级以后，(3.5a) 式中的第二项将变得与第一项相同量级，因此 inflation 过程就会结束．如果要求 $(\phi_{max}-\phi_0)<e^{-60}$，则足够大的 inflation 就能解决平坦性等诸问题。

ϕ 最后下降到极小值 ϕ_{min} 附近，对于充分小的 $\phi-\phi_{min}$，$V(\phi)\approx\frac{1}{2}(\phi-\phi_{min})^2$，于是 $(\phi-\phi_{min})$ 的行为类似质量为 m 的有质量标量场，而 e^μ 的行为以 $t^{\frac{2}{3}}$ 膨胀．[14]

四、讨 论

我们已利用 Hartle-Hawking 边界条件计算了8维 Einstein-杨-Mills 理论中的超微空间波函数。波函数的指数下降区域，对应着经典禁戒区域。波函数的振荡区域则对应着经典洛伦兹型解的一个迭加，其中宇宙标度因子 R_3 在初始阶段经历了一个 inflation 过程，而 R_4 仍然保持着小的尺度。

但是，在我们的模型中，存在着一个不足的地方。因为一个真实的 inflation 模型必须存在一个足够大的 $V(\phi)$ 平坦区域，使得量子涨落对于 ϕ 穿越该区域的影响可以忽略。我们的模型并不满足这一条件，引入 dilaton 场可能会解决这个问题，我们将在另文中研究含有 dilaton 场的量子宇宙的 inflation 波函数。

参 考 文 献

[1] Li Xinzhou, *Phys. Lett.*, **220B**(1989), 509.
[2] Li Xinzhou, et al., *Phys. Lett.*, **201B**(1988), 34.
[3] Li Xinzhou, et al., *Gen. Rel. Grav.*, **20**(1988), 1087.
[4] S. Randjbar-Daemi, A. Salam and J. Strathdee, *Phys. Lett.*, **124B**(1983), 345.
[5] P. H. Frampton and K. Yamamo, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 2016.
[6] 刘棋，李新洲，徐建军，高能物理与核物理，**13**(1989)，985.
[7] H. Georgi, *Nucl. Phys.*, **B156**(1979), 126.
[8] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev.*, **D28**(1983), 2960.
[9] B. S. DeWitt, *Phys. Rev.*, **160**(1967), 1113; C. W. Misner, *Phys. Rev.*, **186**(1969), 1319.
[10] Z. C. Wu, *Phys. Lett.*, **146B**(1984), 307.
[11] J. J. Halliwell, *Nucl. Phys.*, **B266**(1986), 228; **B286**(1987), 729.
[12] Zhong Yu and Li Xinzhou, *Phys. Rev.*, **D42**(1990), 712.
[13] S. W. Hawking and D. N. Page, *Nucl. Phys.*, **B264**(1985), 185.
[14] M. S. Turner, *Phys. Rev.*, **D28**(1983), 1243.

The Quantum Cosmology of Einstein-Yang-Mills Theory in Eight-Dimensions

Su Bing Li Xinzhou

(East China Institute for Theoretical Physics, Box 532, 130 Mei Long Road, Shanghai 200237)

Abstract

In this paper, the quantum cosmology of Einstein-Yang-Mills has been studied. The Hartle-Hawking proposal for the boundary conditions of the Universe is extended to Eight-dimensional Einstein-Yang-Mills theory. A minisuperspace wave function is calculated in the classical limit corresponding to a superposition of classical solutions in which four of the dimensions remain small while the other four behave like an inflationary Universe.