

(2+1) 维手征 Gross-Neveu 模型的 Ward-Takahashi 恒等式和质量谱

沈 坤 袁 忠 平

(华中师范大学粒子物理研究所, 武汉 430070)

摘 要

本文利用含复合场的手征 Ward-Takahashi 恒等式讨论了 (2+1) 维手征 Gross-Neveu 模型的费米子质量和束缚态的谱性质。在最低阶近似下, 质量谱与大 N 展开的结果一致。当手征对称是一种近似的对称性时, 得到了轴矢流部分守恒。

一、引 言

量子色动力学 (QCD) 普遍地被认为是强相互作用理论的最好候选者^[1]。由于 QCD 在高能情况下具有渐近自由性质, 因而可以利用微扰论来处理硬过程。可是, 在低能情况下, 相互作用很强, 微扰展开已不再适用, 而应采用非微扰方案。由于非微扰本身具有内在所固有的困难, QCD 的束缚态、手征对称性和谱性质仍未完全解决^[2,3]。

考虑到 Gross-Neveu 模型具有 QCD 的某些特征, 例如渐近自由、手征对称性动力学自发破缺和费米子质量的动力学生成等性质^[4], 对 Gross-Neveu 模型的研究将有助于进一步了解 QCD 理论的手征对称性和束缚态的谱性质。近年来, 人们提出了一些不同于大 N 展开的其它方法, 如变分方法、背景场方法和高斯有效势方法等^[5-7], 并利用这些方法研究了 Gross-Neveu 模型的质量谱性质。本文利用含复合场的 Ward-Takahashi 恒等式的方法来确定手征 Gross-Neveu 模型的费米子和束缚态的质量谱。

鉴于在 (1+1) 维模型中不存在连续相变的事实^[8], 考虑到 (2+1) 维手征 Gross-Neveu 模型具有非微扰的可重整性质^[9], 本文讨论了 (2+1) 维手征 Gross-Neveu 模型的质量谱性质。

为了描述费米子对凝聚, 在第二节中引入了复合外源的生成泛函。根据手征对称性, 导出了手征 Ward-Takahashi 恒等式。在第三节中, 我们利用 Ward-Takahashi 恒等式得到了费米子和束缚态的质量谱。在最低阶近似下, 费米子的质量谱与大 N 展开所得结果一致。当 $\langle \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rangle = 0$ 时, 复合场 $\bar{\psi}(x) i \gamma_5 \psi(x)$ 对应于动力学破缺后的 Goldstone 玻色子。考虑到 QCD 中的夸克具有质量, 手征对称性是一种近似的对称性。为此, 在第

四节中,我们研究了费米子具有质量、手征对称性是近似的情况。由于费米子质量项可以当作复合外源项来处理,有质量的费米子的生成泛函可以用手征对称的生成泛函来表达。由此导出了手征 Ward-Takahashi 恒等式,确定了相应的质量谱,并得到了轴矢流部分守恒的性质。

二、有效作用量和手征 Ward-Takahashi 恒等式

Gross-Neveu 模型是一种低维、具有渐近自由性质的场论模型^[9]。该模型是可重整的,并且是一种具有动力学自发破缺的理论。

(2 + 1) 维手征 Gross-Neveu 模型的拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\gamma \cdot \partial\psi - \frac{g}{2N} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2]. \quad (2.1)$$

其中 $\psi^a (a = 1, \dots, N)$ 是无质量的费米子场。

在手征变换

$$\delta\psi(x) = \frac{i}{2} (\alpha + \gamma_5\beta)\psi(x), \quad (2.2a)$$

$$\delta\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(x) \frac{i}{2} (-\alpha + \gamma_5\beta), \quad (2.2b)$$

下,拉氏量具有不变性。相应地, Noether 流为

$$J_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \frac{1}{2} \gamma_\mu \psi(x), \quad (2.3a)$$

$$A_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x). \quad (2.3b)$$

手征变换的生成元为

$$Q = \int d^2x J_0(x), \quad (2.4a)$$

$$Q_5 = \int d^2x A_0(x). \quad (2.4b)$$

由(2.1)式可知,当 $g < 0$ 时,费米子之间的吸引相互作用使得微扰真空变得不稳定,费米子对将发生真空凝聚,手征对称将自发破缺,通常称之为动力学自发破缺^[9]。

为了描述动力学自发破缺,通常引入复合场 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 、 $\bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x)$ 的外源 $K(x)$ 和 $K_5(x)$ ^[4,10]。相应地,生成泛函为

$$\begin{aligned} Z[\bar{\eta}, \eta; K, K_5] &= e^{iW[\bar{\eta}, \eta; K, K_5]} \\ &= \int D[\bar{\psi}, \psi] \exp \left(i \int d^3x [\mathcal{L} + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) + \bar{\psi}(x)\psi(x)K(x) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x)K_5(x)] \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中 $W[\bar{\eta}, \eta; K, K_5]$ 是连通 Green 函数的生成泛函。

定义

$$\frac{\delta W}{\delta \eta(x)} = -\bar{\psi}_c(x), \quad (2.6a)$$

$$\frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} = \psi_c(x), \quad (2.6b)$$

$$-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} W = G(x), \quad (2.6c)$$

$$-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} i\gamma_5 \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} W = G_5(x). \quad (2.6d)$$

由 (2.6) 式可知

$$\frac{\delta W}{\delta K(x)} = G(x) + \bar{\psi}_c(x)\psi_c(x), \quad (2.7a)$$

$$\frac{\delta W}{\delta K_5(x)} = G_5(x) + \bar{\psi}_c(x)i\gamma_5\psi_c(x). \quad (2.7b)$$

利用 Legendre 变换, 有效作用量为

$$\begin{aligned} \Gamma[\bar{\psi}_c, \psi_c; G, G_5] = & W[\bar{\eta}, \eta; K, K_5] - \int d^3x [\bar{\psi}_c(x)\eta(x) + \bar{\eta}(x)\psi_c(x)] \\ & - \int d^3x [K(x)[G(x) + \bar{\psi}_c(x)\psi_c(x)] + K_5(x)[G_5(x) + \bar{\psi}_c(x)i\gamma_5\psi_c(x)]]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

相应地, 有

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_c(x)} = \bar{\eta}(x) + \bar{\psi}_c(x)[K(x) + i\gamma_5 K_5(x)], \quad (2.9a)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_c(x)} = -\eta(x) - [K(x) + i\gamma_5 K_5(x)]\psi_c(x), \quad (2.9b)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta G(x)} = -K(x), \quad (2.9c)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta G_5(x)} = -K_5(x). \quad (2.9d)$$

在手征变换下, 外源的变换为

$$\delta \bar{\eta}(x) = \bar{\eta}(x) \frac{-i}{2} (\alpha + i\gamma_5 \beta), \quad (2.10a)$$

$$\delta \eta(x) = \frac{-i}{2} (\gamma_5 \beta - \alpha) \eta(x), \quad (2.10b)$$

$$\delta K(x) = \beta K_5(x), \quad (2.10c)$$

$$\delta K_5(x) = -\beta K(x). \quad (2.10d)$$

由生成泛函 $W[\bar{\eta}, \eta; K, K_5]$ 的不变性可以得到

$$\int d^3x \left[\bar{\eta}(x) \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} + \frac{\delta W}{\delta \eta(x)} \eta(x) \right] = 0. \quad (2.11a)$$

$$\int d^3x \left[\bar{\eta}(x) \frac{i}{2} \gamma_5 \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} - \frac{\delta W}{\delta \eta(x)} \frac{i}{2} \gamma_5 \eta(x) + \frac{\delta W}{\delta K_5(x)} K(x) - \frac{\delta W}{\delta K(x)} K_5(x) \right] = 0. \quad (2.11b)$$

这就是连通 Green 函数生成泛函的 Ward-Takahashi 恒等式。将 (2.11b) 式对外源求若干次泛函导数, 然后令外源为零就可以得到 Green 函数之间的一些 Ward-Takahashi 恒等式。

为了讨论质量谱的方便, 我们将 (2.11) 式表为有效作用量的形式。利用 (2.6-7) 式和 (2.9) 式, (2.11) 式可以化为

$$\int d^3x \left[\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_c(x)} \psi_c(x) + \bar{\psi}_c(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_c(x)} \right] = 0, \quad (2.12a)$$

$$\int d^3x \left[\bar{\psi}_c(x) \frac{i}{2} \gamma_5 \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_c(x)} - \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_c(x)} \frac{i}{2} \gamma_5 \psi_c(x) + \frac{\delta\Gamma}{\delta G(x)} G_5(x) - \frac{\delta\Gamma}{\delta G_5(x)} G(x) \right] = 0. \quad (2.12b)$$

以上两式就是有效作用量的手征 Ward-Takahashi 恒等式。将上式对经典场求若干次泛函导数后, 就可以得到正规顶角之间的一些 Ward-Takahashi 恒等式。通过这些恒等式, 我们可以确定手征对称性动力学破缺后的质量谱。

三、质量谱

当对称性实现后, 轴对称性将自发破缺, 并伴随有费米子质量的产生。因此, 轴 Ward-Takahashi 恒等式对确定质量谱起着关键性的作用。

首先我们确定费米子的质量。将 (2.12b) 式对 $\psi_c(y)$ 和 $\bar{\psi}_c(x)$ 求导数后, 有

$$\begin{aligned} & \int d^3x \left[\bar{\psi}_c(x) \frac{i}{2} \gamma_5 \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\psi}_c(x)\delta\psi_c(y)\delta\bar{\psi}_c(x)} - \delta^3(x-z) \frac{i}{2} \gamma_5 \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_c(y)\delta\bar{\psi}_c(x)} \right. \\ & - \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\psi}_c(x)\delta\psi_c(y)\delta\psi_c(x)} \frac{i}{2} \gamma_5 \psi_c(x) + \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}_c(x)\delta\psi_c(x)} \frac{i}{2} \gamma_5 \delta^3(x-y) \\ & \left. + \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\psi}_c(x)\delta\psi_c(y)\delta G(x)} G_5(x) - \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\psi}_c(x)\delta\psi_c(y)\delta G_5(x)} G(x) \right] = 0. \quad (3.1) \end{aligned}$$

当外源为零时,

$$\psi_c(x)|_{J \rightarrow 0} = \bar{\psi}_c(x)|_{J \rightarrow 0} = 0. \quad (3.2)$$

其中 J 代表所有的外源。利用 (2.7a-b) 式, (3.1) 式化为

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \gamma_5 \Gamma_{\bar{\psi}, \psi}^{(2)}(y, z) + \Gamma_{\bar{\psi}, \bar{\psi}}^{(2)}(y, z) \frac{i}{2} \gamma_5 \\ & = \int d^3x \left[\Gamma_{\bar{\psi}, \psi, G}^{(3)}(y, z; x) \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rangle - \Gamma_{\bar{\psi}, \psi, G_5}^{(3)}(y, z; x) \langle \bar{\psi} \psi \rangle \right]. \quad (3.3) \end{aligned}$$

根据手征对称性可知, 顶角之间有如下关系

$$\Gamma_{\bar{\psi}, \psi, G}^{(3)}(y, z; x) = -i \gamma_5 \Gamma_{\bar{\psi}, \psi, G_5}^{(3)}(y, z; x). \quad (3.4)$$

应用 (3.4) 式, 将 (3.3) 式进行 Fourier 变换后, 可得

$$i \frac{1}{2} \gamma_5 \Gamma_{\bar{\psi}, \psi}^{(2)}(p) + \Gamma_{\bar{\psi}, \bar{\psi}}^{(2)}(p) \frac{i}{2} \gamma_5 = -i \gamma_5 \Gamma_{\bar{\psi}, \psi, G}^{(3)}(p, -p; 0) (\langle \bar{\psi} \psi \rangle + i \gamma_5 \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rangle), \quad (3.5)$$

其中利用了 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 、 $\bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x)$ 的真空期望值是与 x 无关的性质。

由于 $\Gamma_{\psi,\bar{\psi}}^{(2)}(p)$ 的一般形式可以表为

$$\Gamma_{\psi,\bar{\psi}}^{(2)}(p) = A(p^2)\gamma \cdot p + B(p^2). \quad (3.6)$$

在 (3.5) 式的左边, 动能项部分相互抵消, 仅保留自能项部分, 即

$$\frac{i}{2}\gamma_5\Gamma_{\psi,\bar{\psi}}^{(2)}(p) + \Gamma_{\psi,\bar{\psi}}^{(2)}(p)\frac{i}{2}\gamma_5 = i\gamma_5B(p^2). \quad (3.7)$$

根据以上分析可知, 当 $p \rightarrow 0$ 时, 由 (3.5) 式可以确定动力学破缺后费米子的质量

$$m_f = \Gamma_{\psi,\bar{\psi},c}^{(3)}(0,0;0)(\langle\bar{\psi}\psi\rangle + i\gamma_5\langle\bar{\psi}i\gamma_5\psi\rangle). \quad (3.8)$$

上式表明, 当没有费米子对凝聚时, 费米子质量仍保持为零; 当存在动力学自发破缺时, 对称性实现后费米子获得了质量。

在动力学自发破缺的理论中, 存在着由费米子对形成的束缚态。该束缚态可以表为复合场的形式, 并记为

$$\sigma(x) = a\bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (3.9a)$$

$$\pi(x) = b\bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x). \quad (3.9b)$$

由束缚态在手征变换下的性质可知, $a = b$ 。根据 (3.9a) 式的真空期望值可知

$$a = \frac{\langle\sigma\rangle}{\langle\bar{\psi}\psi\rangle}. \quad (3.10)$$

将 (2.12b) 式对 $G_5(y)$ 求导, 有

$$\begin{aligned} & \int d^3x \left[\bar{\psi}_c(x) \frac{i}{2} \gamma_5 \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta G_5(y) \delta \bar{\psi}_c(x)} - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta G_5(y) \delta \psi_c(x)} \frac{i}{2} \gamma_5 \psi_c(x) \right. \\ & \left. + \frac{\delta \Gamma}{\delta G(x)} \delta^3(x-y) + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta G_5(y) \delta G(x)} G_5(x) - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta G_5(y) \delta G_5(x)} G(x) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

将 (3.11) 式对 $G(x)$ 求导, 可得

$$\begin{aligned} & \int d^3x \left[\bar{\psi}_c(x) \frac{i}{2} \gamma_5 \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta G(x) \delta G_5(y) \delta \bar{\psi}_c(x)} - \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta G(x) \delta G_5(y) \delta \psi_c(x)} \frac{i}{2} \gamma_5 \psi_c(x) \right. \\ & \left. + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta G(x) \delta G(x)} \delta^3(x-y) + \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta G(x) \delta G_5(y) \delta G(x)} G_5(x) \right. \\ & \left. - \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta G(x) \delta G_5(y) \delta G_5(x)} G(x) - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta G_5(x) \delta G_5(y)} \delta^3(x-z) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

应用 (3.2) 式, (3.11) 和 (3.12) 式分别化为

$$\Gamma_{G_5}^{(2)}(x,y) = \Gamma_{G_5}^{(2),G_5}(x,y) \frac{\langle\bar{\psi}i\gamma_5\psi\rangle}{\langle\bar{\psi}\psi\rangle} \quad (3.13)$$

$$\Gamma_{G_5}^{(2)}(y,z) - \Gamma_G^{(2)}(y,z) = \int d^3x [\Gamma_{G_5}^{(3),G_5}(z,y;x)\langle\bar{\psi}\psi\rangle - \Gamma_{G_5}^{(3),G_5}(z,y;x)\langle\bar{\psi}i\gamma_5\psi\rangle]. \quad (3.14)$$

经 Fourier 变换后, 当 $p \rightarrow 0$ 时, 应用 (3.9) 式可以由 (3.13-14) 式导出束缚态 σ, π 的

质量谱为

$$m_\pi^2 = -\Gamma_{G,G_s}^{(2)}(0)\langle\phi\psi\rangle\langle\bar{\psi}i\gamma_5\psi\rangle/\langle\sigma\rangle^2. \quad (3.15)$$

$$m_\sigma^2 = m_\pi^2 + \Gamma_{G,G_s,G_s}^{(3)}(0,0;0)\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2/\langle\sigma\rangle^2 \\ - \Gamma_{G,G_s,G_s}^{(3)}(0,0;0)\langle\bar{\psi}i\gamma_5\psi\rangle\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2/\langle\sigma\rangle^2. \quad (3.16)$$

下面我们讨论手征对称性破缺后费米子质量的生成和束缚态的质量谱性质以及 Goldstone 玻色子等问题。

由(3.8)式可以看出, $\Gamma_{\bar{\psi},\psi;G}^{(3)}(p,-p;0)$ 是完全正规顶角因子。它包含有 $1/N$ 的各级之和, 见图1。在图1中, \times 表示与费米子对凝聚 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 相关的顶角, 费米子外线是应截去的外腿。

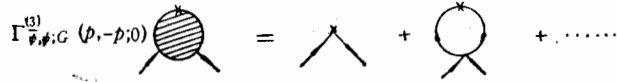


图1 顶角修正

在最低阶近似下,

$$\Gamma_{\bar{\psi},\psi;G}^{(3)}(0,0;0) = g/N. \quad (3.17)$$

费米子质量为

$$m_f = \frac{g}{N} [\langle\bar{\psi}\psi\rangle + i\gamma_5\langle\bar{\psi}i\gamma_5\psi\rangle]. \quad (3.18)$$

这与大 N 展开给出的结果完全一致^[4]。应该指出, 在动力学破缺的理论中, 自由拉氏量和相互作用拉氏量的划分与通常的微扰论不同^[11,12]。如在手征 Gross-Neveu 模型中,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}'_1. \quad (3.19)$$

其中

$$\mathcal{L}_0 = -\bar{\psi}\gamma \cdot \partial\psi, \quad (3.20a)$$

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{g}{2N} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2]. \quad (3.20b)$$

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 - m\bar{\psi}\psi, \quad (3.20c)$$

$$\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1 + m\bar{\psi}\psi. \quad (3.20d)$$

通常的微扰展开是以 \mathcal{L}_0 为基础对 \mathcal{L}_1 进行展开, 而(3.17)式所对应的最低阶近似是以 \mathcal{L}'_0 为基础对 \mathcal{L}'_1 进行展开。

当破缺方向的选择使得

$$\langle\bar{\psi}i\gamma_5\psi\rangle = 0 \quad (3.21)$$

时, 粒子的质量谱为

$$m_f = \Gamma_{\bar{\psi},\psi;\sigma}^{(3)}(0,0;0)\langle\sigma\rangle, \quad (3.22a)$$

$$m_\pi^2 = 0, \quad (3.22b)$$

$$m_\sigma^2 = \Gamma_{G,G_s,G_s}^{(3)}(0,0;0)\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2/\langle\sigma\rangle^2. \quad (3.22c)$$

在(3.22a)式中, 我们利用了(3.9a)式将 $\Gamma_{\bar{\psi},\psi;G}^{(3)}$ 改写为 $\Gamma_{\bar{\psi},\psi;\sigma}^{(3)}$ 。(3.22a)式就是 Goldberger-Treiman 关系^[13]。由(3.22b)式可知, π 介子质量为零。结合复合场与轴荷的

对易子

$$\langle 0|[Q_5, \bar{\psi}(x)\psi(x)]|0\rangle = 0, \quad (3.23a)$$

$$\langle 0|[Q_5, \bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x)]|0\rangle \neq 0. \quad (3.23b)$$

根据 Goldstone 定理可知^[14], 束缚态 π 或复合场 $\bar{\psi}i\gamma_5\psi$ 就对应于破缺后的 Goldstone 玻色子.

根据 $m_t > 0$ 和 $\langle \bar{\psi}(x)\psi(x) \rangle = -\text{tr}S_F(0)$ 的性质可知, $\langle \bar{\psi}i\gamma_5\psi \rangle$ 和 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ 均为负值. 这样, (3.8)式要求

$$\Gamma_{\bar{\psi}, \psi; G}^{\langle \rangle}(0, 0; 0) \leq 0. \quad (3.24)$$

上式表明, 只有当四费米子之间的相互作用是吸引的情况下, 才能发生动力学破缺. 由此, 费米子获得了质量.

由于 (2+1) 维 Gross-Neveu 模型是非微扰可重整的, 根据 (3.8) 式可以计算 $1/N$ 的任一阶下的费米子质量谱. 顺便指出, 即使在 N 较小的情况下, 质量谱公式也是成立的, 这是与大 N 展开所不同之处.

四、有质量费米子的谱性质和轴矢流部分守恒

前面几节我们讨论了手征对称性是严格的情况. 然而, 在 QCD 中夸克具有质量, 手征对称性不再是严格的, 而只是一种近似的对称性. 为此, 在这节中我们讨论在动力学破缺之前费米子有质量的情况.

相应地, 拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}(\gamma \cdot \partial + m_0)\psi - \frac{g}{2N} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2]. \quad (4.1)$$

其中 m_0 是破缺前费米子的质量. 考虑到费米子质量项可以当作复合外源项来处理, 拉氏量可以改写为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_s - m_0\bar{\psi}\psi. \quad (4.2)$$

其中 s 表示手征对称的情况.

生成泛函为

$$Z[\bar{\eta}, \eta; K, K_5] = e^{iW[\bar{\eta}, \eta; K, K_5]} \\ = \frac{\int D[\bar{\psi}, \psi] \exp\left(i \int d^3x [\mathcal{L}_s + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + (K - m_0)\bar{\psi}\psi + K_5\bar{\psi}i\gamma_5\psi]\right)}{\int D[\bar{\psi}, \psi] \exp\left(i \int d^3x [\mathcal{L}_s - m_0\bar{\psi}\psi]\right)}. \quad (4.3)$$

有质量的费米子的连通 Green 函数的生成泛函可以利用对称的连通生成泛函来表示.

$$W[\bar{\eta}, \eta; K, K_5] = W_s[\bar{\eta}, \eta; K - m_0, K_5] - W_s[0, 0; -m_0, 0]. \quad (4.4)$$

经 Legendre 变换后, 有

$$\Gamma[\bar{\psi}_c, \psi_c; G, G_5] = \Gamma_s[\bar{\psi}_c, \psi_c; G, G_5] - m_0 \int d^3x (\bar{\psi}_c(x)\psi_c(x) + G(x)) \\ - W_s[0, 0; -m_0, 0]. \quad (4.5)$$

由 $\Gamma_s[\bar{\psi}_c, \psi_c; G, G_5]$ 所满足的手征 Ward-Takahashi 恒等式, 可以确定 $\Gamma[\bar{\psi}_c, \psi_c;$

$G, G_5]$ 所满足的手征 Ward-Takahashi 恒等式

$$\int d^3x \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_c(x)} \psi_c(x) + \bar{\psi}_c(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_c(x)} \right] = 0. \quad (4.6a)$$

$$\int d^3x \left[\bar{\psi}_c(x) \frac{i}{2} \gamma_5 \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_c(x)} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_c(x)} \frac{i}{2} \gamma_5 \psi_c(x) + m_0(\bar{\psi}_c(x) i \gamma_5 \psi_c(x) + G_5(x)) \right. \\ \left. + \frac{\delta \Gamma}{\delta G(x)} G_5(x) - \frac{\delta \Gamma}{\delta G_5(x)} G(x) \right] = 0. \quad (4.6b)$$

与第三节完全相似,将 (4.6b) 式对 $\bar{\psi}_c(y)$ 、 $\psi_c(x)$ 求导,有

$$\frac{i}{2} \gamma_5 \Gamma_{\psi, \bar{\psi}}^{(2)}(z, y) + \Gamma_{\psi, \bar{\psi}}^{(2)}(z, y) \frac{i}{2} \gamma_5 = \int d^3x [\Gamma_{\psi, \psi; G}^{(3)}(y, z; x) \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rangle \\ - \Gamma_{\psi, \psi; G_5}^{(3)}(y, z; x) \langle \bar{\psi} \phi \rangle] - i \gamma_5 m_0. \quad (4.7)$$

由于手征对称性的破坏完全来源于费米子质量项,相互作用拉氏量在手征变换下仍具有不变性。因此,有

$$\Gamma_{\psi, \psi; G_5}^{(3)}(y, z; x) = i \gamma_5 \Gamma_{\psi, \psi; G}^{(3)}(y, z; x). \quad (4.8)$$

应用 (4.8) 式,经 Fourier 变换后, (4.7) 式在 $p \rightarrow 0$ 时可化为

$$m_f = m_0 + \Gamma_{\psi, \psi; G}^{(3)}(0, 0; 0) (\langle \bar{\psi} \phi \rangle + i \gamma_5 \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rangle). \quad (4.9)$$

相应地,束缚态的质量谱为

$$m_\pi^2 = -(m_0 + \Gamma_{G; G}^{(3)}(0) \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rangle) \langle \bar{\psi} \phi \rangle / \langle \sigma \rangle^2. \quad (4.10)$$

$$m_\sigma^2 = m_\pi^2 + \Gamma_{G; G; G}^{(3)}(0, 0; 0) \langle \psi \phi \rangle^3 / \langle \sigma \rangle^2 \\ - \Gamma_{G; G; G}^{(3)}(0, 0; 0) \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rangle \langle \bar{\psi} \phi \rangle^2 / \langle \sigma \rangle^2. \quad (4.11)$$

由 (4.10) 式可知,若破缺方向的选取使得 $\langle \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \rangle = 0$, 束缚态 π 的质量不再为零,而是

$$m_\pi^2 = -m_0 \langle \bar{\psi} \phi \rangle / \langle \sigma \rangle^2. \quad (4.12)$$

这与流代数所给出的结果一致^[15]。(4.12) 式表明:当费米子具有质量时,束缚态 π 获得了质量;相应地,轴矢流 A_μ 不再为守恒流。

根据轴矢流 A_μ 的定义和运动方程,有

$$\partial_\mu A_\mu(x) = f_\pi m_\pi^2 \pi(x). \quad (4.13)$$

其中应用了束缚态 π 的定义和质量谱公式,并利用了 $f_\pi = -\langle \sigma \rangle$ 。由此可见,当手征对称是明显破缺时,轴矢流是部分守恒的,它与 PCAC 有完全类似的形式。

应该指出,通常,束缚态 π 的质量谱和轴矢流部分守恒都是在渐近条件下获得的;但这里,给出束缚态 π 的质量谱和轴矢流部分守恒是严格的,不依赖于近似方法。即使 m_0 较大时,手征微扰展开已不再适用,但所得的质量谱和轴矢流部分守恒仍然成立。

感谢李家荣教授的有益讨论。

参 考 文 献

- [1] W. Marciano and H. Pagels, *Phys. Rep.*, **36**(1978), 137.
[2] W. A. Bardeen, C. N. Levinson and S. T. Love, *Nucl. Phys.*, **B323**(1989), 493.

- [3] S. L. Adler and A. C. Davis, *Nucl. Phys.*, **B244**(1984), 469.
- [4] D. J. Gross and A. Neveu, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 3235.
- [5] M. G. Mitchard, J. A. Gracey and J. Macfarlane, *Nucl. Phys.*, **B325**(1989), 470; I. Yotsuyanagi, *Phys. Rev.*, **D39**(1989), 3034.
- [6] A. D. Davis, J. A. Gracey and A. J. Macfarlane, *Nucl. Phys.*, **B295**[FS21], (1988), 617.
- [7] B. Rosenstein and A. Kover, *Phys. Rev.*, **D40**(1989), 523; S. K. Kim, J. Yang, K. S. Soh and J. H. Yee, *Phys. Rev.* **D40**(1989), 2647; J. I. Latorre and J. Soto, *Phys. Rev.*, **D34**(1986), 3111.
- [8] S. Coleman, *Comm. Math. Phys.*, **31**(1973), 259.
- [9] K. Shizuya, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 2327.
- [10] J. W. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2428.
- [11] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.*, **122**(1961), 345; **124**(1961), 246.
- [12] D. Lurie and A. J. Macfarlane, *Phys. Rev.*, **136B**(1963), 816.
- [13] M. L. Goldberger and S. B. Treiman, *Phys. Rev.*, **110**(1958), 1178.
- [14] J. Goldstone, *Nuovo Cimento*, **19**(1961), 154; J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**(1962), 965.
- [15] S. Adler, *Current Algebras*, Benjamin, New York, 1968.

Chiral Symmetry, Ward-Takahashi Identities and Mass Spectra in (2+1) Dimensional Chiral Gross-Neveu Model

SHEN KUN QIU ZHONGPING

(Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan 430070)

ABSTRACT

Chiral Ward-Takahashi identities with composite fields are applied to investigate mass spectra in (2+1) dimensional chiral Gross-Neveu model. The fermion mass and bound state spectra are obtained, which are in agreement with large-N expansion in the lowest approximation. When the chiral symmetry is an approximate one, we obtain the PCAC.