

低维规范理论中的费米子真空凝聚*

罗向前 陈启洲
(中山大学物理系, 广州 510275)

摘 要

我们把么正变换、变分法和纯规范场准确基态结合在一起, 系统研究(1+1)维和(2+1)维带费米子格点规范理论的真空结构和手征对称性自发破缺, 得到 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 深入到弱耦合区的标度行为。本文结果与连续 Schwinger 模型一致, 并预言了 QCD₂、QED₃ 和 QCD₃ 的费米子真空凝聚值。

一、引 言

费米子真空凝聚 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 是量子场论中非常重要的物理量, 它不但显示理论的非微扰特征, 而且表征手征对称性自发破缺。人们还猜测它与费米子禁闭紧密相关^[1]。

Wilson 所提出的格点规范理论(LGT)是比较成功的非微扰量子理论。近来, 人们利用 LGT 对强子谱^[2]、胶球质量^[3]、弦张力^[4]、手征对称性^[5]、有限温度 QCD 相变^[6]和弱相互作用矩阵元^[7]等方面进行了研究, 并取得许多成果, 同时还发展了各种计算方法。Monte Carlo 模拟(MC)方法是值得注意的一种。但数值计算在很大程度上受到计算机能力的限制, 目前所有的计算只能达到过渡区附近, 因此有必要发展有效的解析方法。

格点计算是否可靠, 取决于所得的结果能否延伸到弱耦合区, 能否得到正确的标度行为。在哈氏形式中, 这个问题归结为格点哈氏量的对角化, 可由本文所讨论的么正变换、变分法和纯规范场的准确基态的结合来实现。

本文系统地建立一套有效的解析方法, 处理 $(d+1)$ 维哈氏形式 LGT 中的费米子, 并用以讨论真空结构和手征对称性自发破缺, 取得了令人满意的重要结果, 其中部分已在国内外几种杂志上发表^[8-16], 而 QCD₃ 的结果最近才完成。本文把这些结果进行系统的综合和分析。

研究(1+1)维 LGT, 目的是检验本文所建立的方法正确性, 因为它们可以与连续理论的准确解(例如 Schwinger 模型)比较。研究(2+1)维 LGT, 是由于它们具有(3+1)维 LGT 很多重要性质, 而且与高温超导紧密相关。

本文 1991 年 7 月 30 日收到。

* 国家教委博士学科点专项科研基金、中山大学高等学术中心、国家自然科学基金资助。

二、自由费米子、么正变换和变分法

我们首先显示么正变换和变分法如何把带自由费米子的格点哈氏量对角化。其哈氏量为^[10]

$$H_{f,rec} = \frac{1}{2a} \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) \gamma_k \psi(x+k) + m \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x) + \frac{r}{2a} \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) [\psi(x) - \psi(x+k)], \quad (2.1)$$

其中 a 是格点的格距, $k = \pm \hat{1}, \pm \hat{2}, \dots, \hat{d}$, r 是 Wilson 参数, 在 $(d+1)$ 维, 费米子场 $\psi(x)$ 可由上分量 $\xi(x)$ 和下分量 $\eta^+(x)$ 表示

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta^+(x) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

裸真空态 $|0\rangle$ 定义为

$$\xi(x)|0\rangle = \eta(x)|0\rangle = 0. \quad (2.3)$$

利用富氏变换和正交归一条件, 得出 $H_{f,rec}$ 在动量空间的表达式

$$H_{f,rec} = \sum_p \left[\sum_j \bar{\psi}(p) i \gamma_j \frac{\sin(pja)}{a} \psi(p) + m \bar{\psi}(p) \psi(p) + 2r \bar{\psi}(p) \psi(p) \sum_j \frac{\sin^2(pja/2)}{a} \right], \quad (2.4)$$

其中 $j = \hat{1}, \dots, \hat{d}$. 从上式看出非对角项只有第一项——动能项.

若 $|\mathcal{Q}_{f,rec}\rangle$ 是 H 的准确基态, 它具有以下性质

$$H_{f,rec} |\mathcal{Q}_{f,rec}\rangle = E_0^{f,rec} |\mathcal{Q}_{f,rec}\rangle, \quad (2.5)$$

其中 $E_0^{f,rec}$ 是真空能量最小值. 我们设 $|\mathcal{Q}_{f,rec}\rangle$ 的形式为

$$|\mathcal{Q}_{f,rec}\rangle = \exp(iS_f^{f,rec}) |0\rangle. \quad (2.6)$$

在自由费米子情形, $S_f^{f,rec}$ 可用动量空间的算符表示

$$S_f^{f,rec} \equiv \sum_p \theta_p S_p, \\ S_p = -\frac{1}{A_p} \sum_r \psi^+(p) \gamma_r \psi(p) \frac{\sin pja}{a}, \\ A_p = \left[\sum_j \left(\frac{\sin pja}{a} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.7)$$

目的是为了把 $H_{f,rec}$ 对角化, 么正变换 $\exp(-iS_f^{f,rec}) H_{f,rec} \exp(iS_f^{f,rec})$ 实际上是格点形式的 Foldy-Wouthuysen 变换, $|\mathcal{Q}_{f,rec}\rangle$ 反映了复杂的真空结构: 真空中有很多正反费米子对, 即填满的 Dirac 海.

在么正变换下, 动量空间的哈氏量变为

$$H'(p)_{f,rec} = \left[\left(m + \frac{2r}{a} \sum_j \sin^2 pja / 2 \right) \cos 2\theta_p + A_p \sin 2\theta_p \right] \bar{\psi}(p) \psi(p) + \left[\cos 2\theta_p - \frac{1}{A_p} \left(m + \frac{2r}{a} \sum_j \sin^2 pja / 2 \right) \sin 2\theta_p \right]$$

$$\times \sum_j \bar{\psi}(p) i\gamma_j \psi(p) \frac{\sin pja}{a}, \quad (2.8)$$

真空能量为

$$E_0^{\text{free}} = \langle 0 | H'_{\text{free}} | 0 \rangle \\ = -N_c N_f \sum_p \left[\left(m + \frac{2r}{a} \sum_j \sin^2 pja / 2 \right) \cos 2\theta_p + A_p \sin 2\theta_p \right], \quad (2.9)$$

其中 N_c 和 N_f 分别是颜色和味道数, 而 θ_p 是变分参数, 由真空能量极小来决定, 反映真空是系统最低能态. 所定出的变分参数为

$$\tan 2\theta_p = \frac{A_p}{m + \frac{2r}{a} \sum_j \sin^2 pja / 2}, \quad (2.10)$$

$$\cos 2\theta_p > 0.$$

把上式代入(2.9)式, 得出基态能量为

$$E_0^{\text{free}} = -N_c N_f \sum_p \left[\sum_j \left(\frac{\sin pja}{a} \right)^2 + \left(m + \frac{2r}{a} \sum_j \sin^2 pja / 2 \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.11)$$

这正是能量与动量间的色散关系. 当 $r = 0$ 时 (naive 费米子), 能谱有 2^d 重简并. 当 $r \neq 0$ (Wilson 费米子), 只有在动量空间的原点才有低能模. 把(2.10)式代入(2.8)式, 可以看到第二项正好被抵消, 使哈氏量完全对角化.

虽然当 $a \rightarrow 0$ 时(2.1)式的第三项 (Wilson 项) 趋于零, 但由于 $r \neq 0$ 破坏了手征对称性, 诱导了非零的自由费米子真空凝聚 (V 是格点总数)

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{free}} = \left. \frac{\partial E_0^{\text{free}}}{\partial m} \right|_{m=0} \\ = - \frac{N_c N_f V a^d}{(2\pi)^d} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dp \frac{2r \sum_j \sin^2 pja / 2}{\left[\left(\sum_j 2r \sin^2 pja / 2 \right)^2 + \sum_j \sin^2 pja \right]^{1/2}}. \quad (2.12)$$

在(1+1)维, 这个积分可准确积出 ($N = N_c N_f V$)

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{free}} = - \frac{N}{\pi} \begin{cases} 0, & \text{当 } r = 0. \\ \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} [\ln(r^2/2) - \ln(1-r^2/2 - \sqrt{1-r^2})], & \text{当 } 0 < r < 1. \\ 2, & \text{当 } r = 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

从中可以看出, 只要是 $r \neq 0$, 上式就不等于零.

为了把工作推广到有规范相互作用情形, 把 S_f^{free} 在坐标空间中展开

$$S_f^{\text{free}} = i \sum_{x, k_i} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \psi^+(x) \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_{2n+1}} \psi(x + k_1 + \cdots + k_{2n+1}) \\ + r B_n \psi^+(x) \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_{2n+1}} \psi(x + k_1 + \cdots + k_{2n+2})], \quad (2.14)$$

反映真空中有无数不同距离的正反费米子对, 上式中 A_n 和 B_n 是展开系数, 对 k_i 求和满足 $k_i + k_{i+1} \neq 0$. 对于 Wilson 费米子, $A_n \neq 0$, $B_n \neq 0$.

三、Schwinger 模型和 QCD₂

(1 + 1) 维规范理论的特点是超可重整化, 并且容易研究。特别是 (1 + 1) 维 QED (Schwinger) 模型, 它严格可解, 为量子场论的许多设想提供了实验室。人们期望在 (1 + 1) 维理论发现的某些物理性质可以推广到高维理论中去。

把 (1 + 1) 维规范理论的作用量格点化后, 对应的哈氏量为^[10,11]

$$\begin{aligned}
 H &= H_g + H_k + H_m + H_r, \\
 H_g &= \frac{g^2}{2a} \sum_{y,i} E_i^a(y) E_i^a(y), \\
 H_k &= \frac{1}{2a} \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) \gamma_k U(x, k) \psi(x+k), \\
 H_m &= m \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x), \\
 H_r &= \frac{r}{2a} \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) [\psi(x) - U(x, k) \psi(x+k)], \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

式中 g 是格点裸耦合常数, 与连续理论的规范不变荷的关系为 $g = ea$, $\gamma_k = \sigma_k$, $\gamma_0 = \sigma_3$, 规范场链 $U(x, k)$ 与电场 $E_i^a(y)$ 是一对共轭变量, 满足

$$\begin{aligned}
 [U(x, k), E_j^a(y)] &= \lambda^a U(x, k) \delta_{x,y} \delta_{k,i}, \\
 [U^+(x, k), E_j^a(y)] &= -U^+(x, k) \lambda^a \delta_{x,y} \delta_{k,i}, \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

而 λ^a 是规范群的生成元

$$\lambda^a = \begin{cases} 1, & \text{对 } U(1) \text{ 群.} \\ \frac{\sigma_a}{2}, & \text{对 } SU(2) \text{ 群.} \\ 8 \text{ 个 Gell-mann 矩阵 } / 2, & \text{对 } SU(3) \text{ 群.} \end{cases} \quad (3.3)$$

理论的裸真空 $|0\rangle$ 定义为

$$\xi(x) |0\rangle = \eta(x) |0\rangle = E_j^a(y) |0\rangle = 0. \quad (3.4)$$

由上节讨论可知, 物理真空是由很多正反费米子组成的, 为了反映这一事实, 我们假设它具有如下形式

$$|\mathcal{Q}\rangle = \exp(iS_f) |0\rangle. \quad (3.5)$$

S_f 在坐标空间的形式类似自由场的 (2.14) 式, 所不同的是把展开系数用变分参数代替, 并在正反费米子对中间插入规范场链, 以满足规范不变性, 即

$$\begin{aligned}
 S_f = i \sum_{x,k_i} \sum_{n=0}^{\infty} & [\theta_n \psi^+(x) \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_{2n+1}} U(x, k_1, \cdots, k_{2n+1}) \psi(x+k_1+\cdots+k_{2n+1}) \\
 & + \theta'_n \psi^+(x) \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_{2n+1}} U(x, k_1, \cdots, k_{2n+2}) \psi(x+k_1+\cdots+k_{2n+2})], \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

其中 θ_n 和 θ'_n 是变分参数, 由真空能量极小决定:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_{\mathcal{Q}}}{\partial \theta_n} &= 0, & \frac{\partial E_{\mathcal{Q}}}{\partial \theta'_n} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 E_{\mathcal{Q}}}{\partial \theta_n^2} &> 0, & \frac{\partial^2 E_{\mathcal{Q}}}{\partial \theta_n'^2} &> 0. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

它们一般是耦合常数 $1/g^2$ 、费米子质量 m 和 Wilson 参数 r 的函数。 E_0 由下式给出

$$E_0 = \frac{\langle Q|H|Q\rangle}{\langle Q|Q\rangle} = \langle 0|\exp(-iS_f)H\exp(iS_f)|0\rangle. \quad (3.8)$$

把定出的 $\theta_n(1/g^2, m, r)$ 和 $\theta'_n(1/g^2, m, r)$ 代入下式

$$\langle \bar{\phi}\phi \rangle_1 = \frac{\langle Q \left| \sum_x \bar{\phi}(x)\phi(x) \right| Q \rangle}{\langle Q|Q\rangle}, \quad (3.9)$$

就可求出费米子真空凝聚与 $1/g^2$ 、 m 和 r 的关系。

只有进入弱耦合区, 所得的结果才是物理相关的。这时 $\langle \bar{\phi}\phi \rangle_1$ 应直接与标度行为比较。由于 $(1+1)$ 维规范理论是超可重整化, 规范不变荷 c 不依赖于参数 a (cut-off 参量)。根据量纲分析, 格点上算得的 $\langle \bar{\phi}\phi \rangle_1$ 与连续理论的 $\langle \bar{\phi}\phi \rangle_c$ 应有如下关系(标度行为):

$$\frac{\langle \bar{\phi}\phi \rangle_c}{c} = \frac{\langle \bar{\phi}\phi \rangle_1}{gV}. \quad (3.10)$$

连续理论中 Schwinger 模型^[20]给出(在手征极限下)

$$\frac{\langle \bar{\phi}\phi \rangle_c}{c} = -\frac{\exp(\gamma)}{2\pi^{3/2}} = -0.16. \quad (3.11)$$

对于 QCD_2 , 文献[21]用红外方法得出 ($c_0 = 2\exp(\gamma)$):

$$\frac{\langle \bar{\phi}\phi \rangle_c}{c} = \begin{cases} -\frac{c_0}{2\pi^{3/2}} = -2 \times 0.16, & \text{对 } N_c = 2. \\ -\frac{c_0}{2\pi^{3/2}} \frac{51}{16\sqrt{3}} = -3 \times 0.1963, & \text{对 } N_c = 3. \end{cases} \quad (3.12)$$

我们在文献[8, 9, 11]中详细讨论了带 naive 费米子的 Schwinger 模型和 QCD_2 的单链近似 ($S_f = \theta_0 S_{f_0}$)、三链近似 ($S_f = \theta_0 S_{f_0} + \theta_1 S_{f_1}$) 和五链近似 ($S_f = \theta_0 S_{f_0} + \theta_1 S_{f_1} + \theta_2 S_{f_2}$), 其结果画在图 1、2、3 上。对于 naive 费米子, S_f 只有奇链项的原因是 $\theta'_n = 0$ 。

从图中结果看到, 单链近似已初步显示标度行为, 三链近似得到满意的标度行为, 并且进一步靠近连续理论的结果, 而五链近似已与三链近似达到难以分辨的程度。从而说明多链项的效应在 $1+1$ 维是可以忽略的。

图 1、2、3 的数据显示, naive 费米子的真空凝聚两倍于连续理论的结果。一个合理的推论是由于 naive 费米子存在加倍问题, 这些多出的费米子会对 $\langle \bar{\phi}\phi \rangle$ 有贡献。在 $d+1$ 维, naive 费米子总数是 2^d , 格点的结果会是连续理论的 2^d 倍。

为了解决费米子加倍问题, 我们采用 Wilson 费米子方案。原因是味道和自旋等量子数有很好的定义, 并且 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 过程能得到很好的解释。

带 Wilson 费米子的哈氏量是 (3.1) 式中 $r \neq 0$ 的情形, 其物理真空态的表达式是 (3.5) 和 (3.6) 式。从前面的讨论和图 1、2、3 可知, 在 $1+1$ 维, 多链项的贡献非常小, S_f 中最重要的是单链项和双链项, 即

$$\begin{aligned} S_f &= \theta_0 S_{f_0} + \theta'_0 S'_{f_0}, \\ S_{f_0} &= i \sum_{x,k} \phi^+(x) \gamma_k U(x, k) \phi(x+k), \end{aligned} \quad (3.13)$$

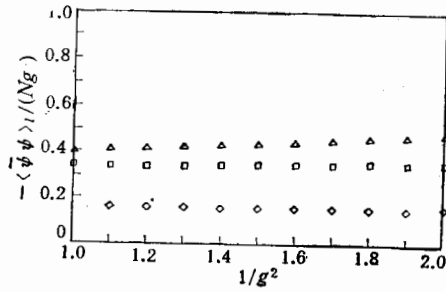


图1 Schwinger 模型中的 $-\langle \bar{\psi}\psi \rangle_i / (Ng)$ 与 $1/g^2$ 的关系
 Δ 代表 $S_f = \theta_0 S_{f_0}$ 的结果, \square 代表 $S_f = \theta_0 S_{f_0} + \theta_1 S_{f_1} + \theta_2 S_{f_2}$ 的结果, 而 \diamond 代表连续理论准确值

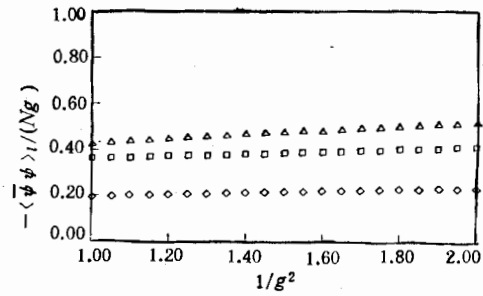


图2 (1+1)维 $SU(2)$ 群 LGT 的 $-\langle \bar{\psi}\psi \rangle_i / (Ng)$ 与 $1/g^2$ 的关系
 Δ 和 \square 的意义同图1, 而 \diamond 代表 Wilson 费米子的结果

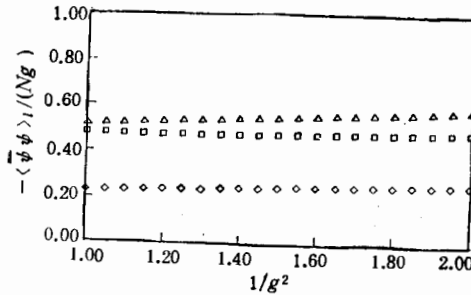


图3 (1+1)维 $SU(3)$ 群 LGT 的 $-\langle \bar{\psi}\psi \rangle_i / (Ng)$ 与 $1/g^2$ 的关系
 Δ 、 \square 和 \diamond 的意义同图2

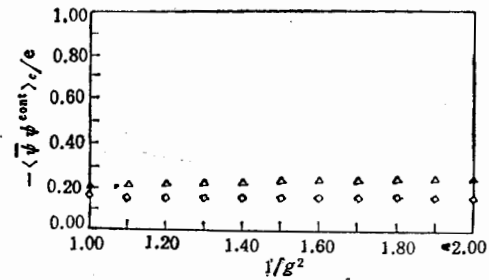


图4 (3.22)式右边与 $1/g^2$ 的关系
 Δ 代表 Wilson 费米子的结果, 而 \diamond 代表连续理论的准确值

$$S'_{i_0} = i \sum_{x,k} \phi^+(x) \gamma_k U(x, 2k) \phi(x + 2k).$$

么正变换下 $\exp(-iS_i) H \exp(iS_i)$ 的表达式已在文献[10]中给出, 由真空能量极小定出的 θ_0 和 θ'_0 代入下式

$$\frac{\langle \bar{\psi}\psi^{latt} \rangle_i}{-N} = \frac{1}{2} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{(2\theta_2)^{2n_2}}{(2n_2)!} \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{(2\theta_1)^{2n_1}}{(2n_1)!} \times \sum_{p_{i_1}, k_{i_2}} \text{Tr}(\gamma_{p_1} \cdots \gamma_{p_{2n_2}} \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_{2n_1}}) \delta_{k_1 + \cdots + k_{2n_1} + 2p_1 + \cdots + 2p_{2n_2}}, \quad (3.14)$$

就可得到格点上 Wilson 费米子的真空凝聚。

但是, (3.14)式不能直接代入(3.10)式来与连续理论比较。原因是由于连续理论和格点有不同的正规化和重整化体系, 不能直接把连续理论中的算符照搬到格点中。格点中的算符不但与同样量纲的算符混合, 而且可以与不同量纲的算符混合。对于 Wilson 费米子, 混合问题变得非常复杂。为了把格点计算与连续理论比较, 我们必须建立格点和连续理论中 $\bar{\psi}\psi$ 算符的关系。

由于 $\bar{\psi}\psi$ 能与单位算符混合, 因此^[10,11,12,17]

$$\bar{\psi}\psi^{cont} = C \bar{\psi}\psi^{latt} + C' I. \quad (3.15)$$

式中的混合系数 $C^{\bar{\psi}\psi}$ 和 C^I 可以在超可重整化理论中用弱耦合展开确定:

$$\langle \bar{\psi}\psi^{\text{cont}} \rangle_{\text{pert}} = (1 + g^2 C_2^{\bar{\psi}\psi}) \langle \bar{\psi}\psi^{\text{latt}} \rangle_{\text{pert}} + (C_0^I + g^2 C_2^I) \text{Tr} I + O(g^4), \quad (3.16)$$

$C_2^{\bar{\psi}\psi}$ 来源于不同的正规化方案. 而 $\langle \bar{\psi}\psi^{\text{latt}} \rangle_{\text{pert}}$ 的计算方法是:

1. 首先把(3.1)式中的规范场链用

$$U(x, k) = \exp(igA_k(x)) = 1 + igA_k(x) - \frac{1}{2} g^2 A_k^2(x) + \dots \quad (3.17)$$

代替, 第一项 $H_g + H_g^{\text{free}}$ 的本征值和本征态由(2.8)式和(2.6)式给出;

2. 把其余部分作为微扰项, 根据 Rayleigh-Schrödinger 微扰论, H 的微扰真空态为

$$|\mathcal{Q}_{\text{pert}}\rangle = |\mathcal{Q}_{\text{free}}\rangle + g|\mathcal{Q}, 1\rangle + g^2|\mathcal{Q}, 2\rangle + \dots; \quad (3.18)$$

3. 在该态下计算

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi^{\text{latt}} \rangle_{\text{pert}} &= \frac{\langle \mathcal{Q}_{\text{pert}} | \bar{\psi}\psi | \mathcal{Q}_{\text{pert}} \rangle}{\langle \mathcal{Q}_{\text{pert}} | \mathcal{Q}_{\text{pert}} \rangle} \\ &= \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{free}} + g^2(G_B + G_C) + O(g^4), \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中 $G_B + G_C = 2(\langle \mathcal{Q}_{\text{free}} | \bar{\psi}\psi | \mathcal{Q}, 2 \rangle + \langle \mathcal{Q}, 1 | \bar{\psi}\psi | \mathcal{Q}, 1 \rangle)$.

由于手征对称性自发破缺是一非微扰特征, 在手征极限下, (3.16) 式左边为零. 把(3.19)式代入(3.16)式, 结果导致

$$\begin{aligned} C_0^I \text{Tr} I &= -\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{free}}, \\ C_2^I \text{Tr} I &= -C_2^{\bar{\psi}\psi} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{free}} - G_B - G_C, \end{aligned} \quad (3.20)$$

(3.15)式变为

$$\bar{\psi}\psi^{\text{cont}} = (1 + g^2 C_2^{\bar{\psi}\psi}) \left(\bar{\psi}\psi^{\text{latt}} - \frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{free}}}{\text{Tr} I} \right) - g^2 \frac{(G_B + G_C)}{\text{Tr} I} + O(g^4). \quad (3.21)$$

这一关系又叫减除, 而 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{free}}$ 由(2.12)式给出. 从中看出正是 Wilson 项破坏手征对称性, 导致 $\bar{\psi}\psi$ 与单位算符的混合.

因此, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ 的标度行为是^[10,12,17]

$$\begin{aligned} \frac{\langle \bar{\psi}\psi^{\text{cont}} \rangle_\epsilon}{e} &= \frac{(1 + g^2 C_2^{\bar{\psi}\psi})(\langle \bar{\psi}\psi^{\text{latt}} \rangle_\epsilon - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{free}}) - g^2(G_B + G_C)}{gV} \\ &\xrightarrow{1/g^2 > 1} \frac{\langle \bar{\psi}\psi^{\text{latt}} \rangle_\epsilon - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{free}}}{gV}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

在手征极限和 $r = 1$ 时, 上式右边与 $1/g^2$ 的关系用图 4 表示. 图中的结果不但显示很好的标度行为, 而且与连续 Schwinger 模型的准确值十分靠近.

现在我们把处理带 Wilson 费米子的 Schwinger 模型的方法推广到 (1+1) 维 QCD. 结果如图 2、3 的钻石符号表示, 与连续理论(3.12)式的数据一致. 红外方法的结果依赖于 C_0 的选择, 不同的理论不一定有相同的 C_0, C_2 . 还依赖于“软”和“硬”胶子的区分. 我们的方法胜于红外方法, 主要在于格点计算基于第一原理, 而且没有引入任何自由参数.

四、(2+1)维格点规范理论

除了超可重整化外, (2+1) 维 LGT 中 Wilson 圈的平均值可严格求出. 但(2+1)

维比(1+1)维复杂得多,因为它与(3+1)维一样,在 H_g 中不但有电能项,而且有磁能项,使通常的 Kogut-Susskind 纯规范场哈氏量很难找到准确基态,所以早期大部分解析计算只限于强耦合区才有效。

幸好格点的哈氏量不是唯一的,选择它的条件只要求满足规范不变性和具有正确的连续极限。利用这一任意性,文献[22-24]发现了一系列具有准确基态的 H_g , 它们有正确的连续极限,并证明了普适性。具有纯规范场准确基态的哈氏量有很多优越性,通过变分法可求出胶球质量和弦张力的严格上限,并且很快可以观察到标度行为。

(2+1)维 LGT 的哈氏量为^[25]

$$\begin{aligned} H &= H_m + H_k + H_g, \\ H_m &= m \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x), \\ H_k &= \frac{1}{2a} \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) \gamma_k U(x, k) \psi(x+k), \\ H_g &= \frac{g^2}{2a} \sum_{y,i} E_i^a(y) E_i^a(y) - \frac{f}{ag^2} \sum_p \text{tr}(U_p + U_p^\dagger) + \Delta H(U_p, U_p^\dagger), \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 H_g 与通常的纯规范场哈氏量只差一项 ΔH , 它是方块变量 U_p 和 U_p^\dagger 的函数,在连续极限下趋于零。 f 是与规范群有关的常数

$$f = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{对 } U(1) \text{ 群.} \\ 1, & \text{对 } SU(N) \text{ 群.} \end{cases} \quad (4.2)$$

为计算方便,我们等价地把 H_g 写为

$$\begin{aligned} H_g &= \frac{g^2}{2a} \sum_{y,i} \exp(-S_g) E_i^a(y) \exp(2S_g) E_i^a(y) \exp(-S_g), \\ S_g &= \frac{f}{2g^2 C} \sum_p \text{tr}(U_p + U_p^\dagger), \end{aligned}$$

其中 $C = \frac{1}{N_c} \text{Tr}(\lambda^a \lambda^a)$ 。很容易证明, H_g 具有一准确基态 $\exp(S_g)|0\rangle$ 。

在(2+1)维, γ_k 仍选为 4×4 的矩阵。众所周知,在(3+1)维无质量理论中, H 具有 γ_5 对称性。在(2+1)维, $\psi(x)$ 仍取为四分量旋量,这是因为 γ_3 和 γ_5 与 γ_1, γ_2 和 γ_4 反对易,可用来定义 H 的手征对称性,对应着两个 Goldstone 玻色子。

把费米子变分真空态与纯规范场的准确基态结合在一起,我们设 H 的物理真空态为

$$|Q\rangle = \exp(iS_f + S_g)|0\rangle, \quad (4.3)$$

S_f 由(3.6)给出。

真空能量和手征序参数的计算与(1+1)维十分类似,不同的是这里把费米子场收缩后,剩下的是各种形状 Wilson 圈的平均值,它们可分解为绕单方块 Wilson 圈平均值之积。例如

$$\sum_{x, k_i} \frac{\langle Q | \bar{\psi}(x) \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_n} U(x, k_1, \cdots, k_n) \psi(x + k_1 + \cdots + k_n) | Q \rangle}{\langle Q | Q \rangle}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} N_f V\right) \sum_{k_i} \text{tr}(\gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_{2n}}) \frac{\int [dU] \exp(2S_g) \text{tr}(U_1 \cdots U_{2n})}{\int [dU] \exp(2S_g)}. \quad (4.4)$$

对于 $U(1)$ 群, 设某一 Wilson 圈绕 l_1 个单方块一次, \cdots , 绕 l_j 个单方块 j 次, 其平均值为^[16]

$$\frac{\int [dU] \exp(2S_g) U_1 \cdots U_{2n}}{\int [dU] \exp(2S_g)} = \left[\frac{I_1(1/g^4)}{I_0(1/g^4)}\right]^{l_1} \cdots \left[\frac{I_j(1/g^4)}{I_0(1/g^4)}\right]^{l_j}; \quad (4.5)$$

$SU(N)$ 群 Wilson 圈的真空平均值可类似计算.

在 $(2+1)$ 维, 裸耦合常数 g 与规范不变荷的关系为 $g^2 = e^2 a$, 由量纲分析可知, $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_l$ 有如下标度行为

$$\frac{\langle \bar{\psi} \psi \rangle_l}{e^4} = \frac{\langle \bar{\psi} \psi \rangle_l}{V g^4} = \text{const}. \quad (4.6)$$

图 5、6、7 显示 $m=0$ 时 $U(1)$ 、 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 群 LGT 中 naive 费米子真空凝聚的结果. 从图上的结果可以看到, 只考虑 S_f 中的单链项, 结果在弱耦合区对 (4.6) 式所预言的标度行为有偏离现象. 在 $(1+1)$ 维, 只有一个空间方向, 第三节的计算表明多链项的贡献很小. 在 $(2+1)$ 维则不然, 以三链项 S_{f_1} 为例

$$S_{f_1} = i \sum_{x, k_i} \phi^+(x) \gamma_{k_1} \gamma_{k_2} \gamma_{k_3} U(x, k_1, k_2, k_3) \phi(x + k_1 + k_2 + k_3), \quad (4.7)$$

在第一象限, 规范场链有很多不同的图形. 因此多链项与长程关联紧密相关, 会在弱耦合区有重要贡献.

如图 5、6、7 所示, 把 S_f 中的三链项加上后 ($S_f = \theta_0 S_{f_0} + \theta_1 S_{f_1}$), 我们得到非常满意的标度行为, 充分证实手征对称性是自发破缺的. 对于 $U(1)$ 群, 这一行为与 Kogut 等人用杂化 Monte Carlo 法^[25]得到的标度行为一致 (他们的结果从 $1/g^2 = 0.8$ 至 $1/g^2 = 2$); 文献[26]用强耦合展开与连接集团展开结合法, 但当 $1/g^2 > 0.8$ 时, 展开级数出现发散.

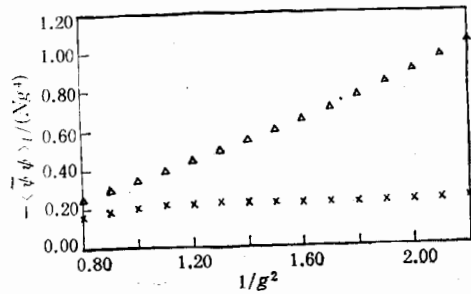


图 5 $(2+1)$ 维 $U(1)$ 群 LGT 中的 $-\langle \bar{\psi} \psi \rangle_1 / (Ng^4)$ 与 $1/g^2$ 的关系
 Δ 代表 $S_f = \theta_0 S_{f_0} + \theta_1 S_{f_1}$ 的结果, 而 \times 代表 $S_f = \theta_0 S_{f_0}$ 的结果

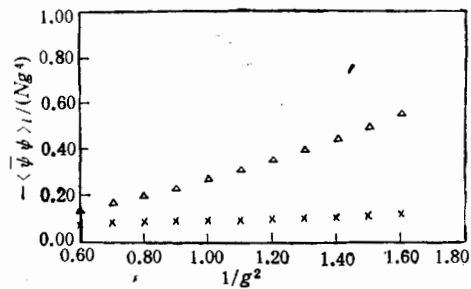


图 6 $(2+1)$ 维 $SU(2)$ 群 LGT 中的 $-\langle \bar{\psi} \psi \rangle_1 / (Ng^4)$ 与 $1/g^2$ 的关系
 Δ 和 \times 的意义同图 5

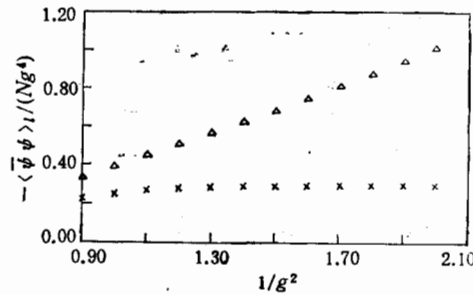


图7 (2+1)维 $SU(3)$ 群 LGT 中的 $-\langle\bar{\phi}\phi\rangle_l/(Ng^4)$ 与 $1/g^2$ 的关系
 Δ 和 \times 的意义同图5

我们这里用 naive 费米子方案,是由于它比 Wilson 方案简单。因为在(2+1)维,(3.16)式和(3.19)式至少要算到 g^4 项,由我们在微扰论计算的的经验可知,这样的图形至少有上百个,而且还有费米子质量重整化问题。

在第三节,我们曾预言 naive 费米子真空凝聚是连续理论的 2^d 倍,因此,连续理论中的费米子真空凝聚为

$$\frac{\langle\bar{\phi}\phi\rangle_{\text{physical}}}{e^4} = \frac{\langle\bar{\phi}\phi\rangle_l}{Vg^42^2} \approx \begin{cases} -0.05, & \text{对 } U(1) \text{ 群.} \\ -2 \times 0.0275, & \text{对 } SU(2) \text{ 群.} \\ -3 \times 0.072, & \text{对 } SU(3) \text{ 群.} \end{cases} \quad (4.8)$$

本节研究与高温超导有紧密联系。在新的超导材料如 La_2CuO_4 中,人们普遍认为超导现象可用 Hubbard 模型或 2 维类空 Heisenberg 模型描述。(2+1)维规范理论中的手征对称性自发破缺对应于 Heisenberg 模型中的反铁磁现象,这种现象与超导有关。

五、总结和讨论

本文把么正变换变分法与纯规范场准确基态结合在一起,系统研究了(1+1)维和(2+1)维 $U(1)$ 、 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 群哈氏形式 LGT 的真空结构和手征对称性自发破缺。在自由费米子情形,本文方法使哈氏量完全对角化并且使真空能量极小,得到正确的色散关系。对于有规范相互作用情形, $\langle\bar{\phi}\phi\rangle$ 显示深入到弱耦合区的标度行为。

我们研究了费米子加倍对 $\langle\bar{\phi}\phi\rangle$ 的影响,得出 naive 费米子真空凝聚是连续理论的 2^d 倍。对于带 Wilson 费米子的 Schwinger 模型,其结果与连续理论的准确值一致,检验了本文方法的正确性;在这一方案中,我们建立的连续理论和格点中 $\bar{\phi}\phi$ 算符的关系(也称算符混合或减除)是至关重要的,假如没有这样的关系,所得的结果不但与连续准确值不符,而且会破坏标度行为,出现发散。本文还预言了 QCD_2 、 QED_3 和 QCD_3 的费米子真空凝聚值,并指出(2+1)维 LGT 的 $\langle\bar{\phi}\phi\rangle$ 与高温超导的相关性。

本文方法的优点是其结果能延拓到更弱的耦合区,而且标度区很宽很稳。对于(3+1)维理论,第四节所用的方法仍然适用[14,15]。在认真考虑长程关联后,肯定会得到更好的标度行为。对真空态研究有了可靠的结果,进一步的工作是计算基本粒子的质量谱。

对 Schwinger 模型的质量谱已有满意的结果^[18,19],对强子质量谱的研究还在进行中。

我们建立的方法对带费米子 LGT 的研究十分有效,把它们推广下去,相信会得到更多强子非微扰性质有意义的结果。

参 考 文 献

- [1] J. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983), 775.
- [2] I. Montvay, *Rev. Mod. Phys.*, **59**(1987), 263.
- [3] A. Patel et al., *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 1288.
- [4] S. Itoh, Y. Iwasaki and T. Yoshie, *Phys. Lett.*, **185B**(1987), 390.
- [5] X. Q. Luo, Ph. D. thesis, Zhongshan University, 1990.
- [6] N. Christ and A. Terrano, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 111.
- [7] X. Q. Luo and S. H. Guo, in *Weak Interactions and CP Violation*, T. Huang and D. D. Wu eds., 156—162 (World Scientific, Singapore) 1990.
- [8] X. Q. Luo and Q. Z. Chen, *J. Phys.*, **G16**(1990), 1181.
- [9] 陈启洲,郑维宏,罗向前,方锡岩,高能物理与核物理,**15**(1991),23.
- [10] Q. Z. Chen and X. Q. Luo, *Phys. Rev.*, **D42**(1990), 1293.
- [11] X. Q. Luo, B. P. He, Q. Z. Chen and S. H. Guo, *Z. Phys.*, **C51**(1991), 423.
- [12] X. Q. Luo, to be published in *Commun. Theor. Phys.*, **16**(1991), 505.
- [13] X. Q. Luo, Q. Z. Chen and S. H. Guo, *High Energy Phys. Nucl. Phys.* (Allerton, New York) **13**(1989), 157; 高能物理与核物理,**13**(1989),328.
- [14] 陈启洲,罗向前,郭硕鸿,中山大学学报(自然科学版),No.2(1989),97.
- [15] X. Q. Luo, Q. Z. Chen and S. H. Guo, *Z. Phys.*, **C47**(1990), 635.
- [16] X. Q. Luo and Q. Z. Chen, UCSB Preprint NSF-ITP-90-212. to be published.
- [17] X. Q. Luo, *Z. Phys.*, **C48**(1990), 283.
- [18] X. Y. Fang, X. Q. Luo, G. C. Xu and Q. Z. Chen, to be published in *J. Phys. G*.
- [19] 陈启洲,方锡岩,许国材,刘金明,罗向前,高能物理与核物理,**15**(1991),518.
- [20] C. J. Hamer, J. Kogut, D. P. Crewther and M. M. Mazzolini, *Nucl. Phys.*, **B208**(1982), 413.
- [21] T. Grandou, H.-T. Cho and H. M. Fried, *Phys. Rev.*, **D37**(1988), 946.
- [22] S. H. Guo, W. H. Zheng and J. M. Liu, *Phys. Rev.*, **D38**(1988), 2591.
- [23] S. H. Guo and W. H. Zheng, *Phys. Rev.*, **D39**(1989), 3144.
- [24] S. H. Guo and Z. B. Li, *Phys. Rev.*, **D41**(1990), 2598.
- [25] E. Dagotto, J. B. Kogut and A. Kocic, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 1083.
- [26] C. J. Burden and C. J. Hamer, *Phys. Rev.*, **D37**(1988), 479.

Fermion Condensates in Lower Dimensional Gauge Theories

LUO XIANGQIAN CHEN QIZHOU

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

ABSTRACT

Combining a unitary transformation, the variational method and the exact ground state of pure gauge Hamiltonian, we investigate systematically the vacuum structure and spontaneous chiral-symmetry breaking in (1+1)- and (2+1)-dimensional Hamiltonian lattice gauge theories with fermions, and obtain nice scaling behaviors for $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ extending to the weak coupling regime. This paper not only reproduces well the exact value in the continuum Schwinger model, but also predicts the values for the fermion condensates in QCD₂, QED₃ and QCD₃.