

高温下弱电相变的自洽研究*

侯德富 李家荣

(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430070)

1993年10月29日收到

摘 要

通过对蝌蚪图中的硬热圈重求和的方法自洽地计算了标准模型在有中性流作用下的高温有效势到 $(\lambda^{3/2}, g^3, g^3)$ 级, 克服了通常计算中存在的困难, 证明了弱电相变是一级相变并给出了临界温度。

关键词 有效势, 硬热圈, 相变。

1 引 言

近来弱电相变再次引起人们的广泛兴趣, 这是由于它对解释宇宙中的重子数不守恒有很重要的意义^[1]。研究这类相变的基础是有限温度下的有效势。可是通常的圈图展开计算过程中会遇到两个困难^[2,3]: 一是当高温下 Higgs 场的凝聚 v 很小时, 标量场质量 m 的三次方没有定义; 其二是当温度高于相变的临界温度时, 存在红外发散。由于第一个困难, 通常只保留到 $m^2(g^2, \lambda)$ 项。在文献[3]中计算了标准模型在高温、高密下的有效势到 (g^2, λ) 级, 给出了二级相变的图象及其临界温度。不久前 Pisarski 等人发展了一种高温下的有效微扰展开方法, 并被广泛地用到热规范理论的各种问题中^[4,5]。本文借助 Pisarski 的思想, 通过对蝌蚪图中硬热圈重求和的方法自洽地计算有效势到 $(\lambda^{3/2}, g^3, g^3)$ 量级, 克服了原有文献中的有关困难^[2,3,5], 并发现标准模型在高温高密下对称性恢复相变是一级相变。

2 标准模型有效势的自洽计算

标准模型的拉氏量满足 $SU(2) \times U(1)_Y$ 规范对称性。设 $A_\mu^a (a = 1, 2, 3)$ 是相应 $SU(2)$, B_μ 是相应于 $U(1)$ 的规范场, 则

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Gau\ss e}} + \mathcal{L}_{\text{fermions}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} + \mathcal{L}_{\text{Gau\ss e fixing}} \quad (1)$$

其中

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Gau\ss e}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi)$$

* 国家自然科学基金资助。

$$\begin{aligned}
 & + c^2(\phi^\dagger\phi) - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \\
 \mathcal{D}_\mu & = \partial_\mu - ig\frac{\tau^a}{2}A_\mu^a - ig'\frac{B_\mu}{2}, \\
 T^{\mu\nu} & = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu, \\
 F_{\mu\nu}^a & = \partial^\mu A_\nu^a - \partial^\nu A_\mu^a - g\epsilon_{abc}A_b^c A_\mu^a.
 \end{aligned}$$

这里 $c^2, \lambda > 0$. 费米场的拉氏量为:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig'B_\mu) \psi_R.$$

若只取顶夸克的 Yakawa 耦合^[5], 则

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = f\bar{q}_L \bar{\phi} t_R + \text{H. C.}.$$

这里

$$q'_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}.$$

规范固定项的贡献为:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge fixing}} = -\frac{1}{2\eta} \left(\partial^\mu A_\mu^a - \frac{1}{2}\eta g\nu\phi^a \right) - \frac{1}{2\eta} \left(\partial^\mu B_\mu - \frac{1}{2}\eta g'\nu\phi^3 \right).$$

其中

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_4 + i\phi_3 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

ϕ 场的真空平均值为

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 \\ \nu \end{vmatrix}, \quad \nu = c\lambda^{-\frac{1}{2}} \neq 0.$$

因而对称性自发破缺. 为了计算有效势, 将场平移至

$$\hat{\phi}(x) = \phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 \\ \nu \end{vmatrix},$$

平移后的有效拉氏量密度的二次型部分为:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_0 & = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^4 \phi_a(k^2 - m_a^2) - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} + m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \\
 & - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + i\bar{t}(i\phi - m_t)t.
 \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned}
 m_a^2 & = -c^2 + \lambda v^2 (a = 1, 2, 3), \\
 m_4^2 & = -c^2 + 3\lambda v^2, \\
 m_W^2 & = \frac{1}{4} g^2 v^2, \quad m_Z^2 = \frac{g^2 + g'^2}{4} v^2, \\
 m_t^2 & = \frac{1}{2} f_t^2 v^2.
 \end{aligned} \quad (4)$$

有效势的树图贡献可直接得到

$$V^0(v^2) = -\frac{c^2}{2} v^2 + \frac{\lambda}{4} v^4. \quad (5)$$

有限温度下有效势的单圈贡献可由蝌蚪图方法得到^[6]

$$V_1^\beta(v^2) = \int d\nu \Gamma^{(1)}. \quad (6)$$

这里 β 是温度 T 的逆; $\Gamma^{(1)}$ 是由温度格林函数所表示的蝌蚪图贡献, 见图 1.



图1 蝌蚪图

这里包括标量场、规范场和费米场的贡献。若选取朗道规范 ($\eta \rightarrow 0$), 鬼场无质量, 有效势中与 ν 相关的部分没有贡献, 因此这里不需要考虑鬼场的蝌蚪图。

设蝌蚪图的内动量为 (ω, \mathbf{k}) , 当 $\omega = 0, \mathbf{k} \rightarrow 0$ 时为软动量, 而 $\omega \neq 0, \mathbf{k} \rightarrow 0$ 时为硬动量。根据

Pisarski 等人提出的有效微扰展开的思想, 当动量是软的时, 需要用带硬热圈的有效传播子和有效顶角^[4]。若把蝌蚪图中的内动量分为软的和硬的两部分, 则有

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) &= \Gamma^{(1)}(\omega = 0, \mathbf{k} \rightarrow 0) + \Gamma^{(1)}(\omega \neq 0, \mathbf{k} \rightarrow 0) \\ &\rightarrow \Gamma^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) + \Gamma^{*(1)}(\omega = 0, \mathbf{k} \rightarrow 0) - \Gamma^{(1)}(\omega = 0, \mathbf{k} \rightarrow 0). \end{aligned}$$

这里的星号表示相应的图中需要用带硬热圈的有效传播子和有效顶角。根据(6)式, 有效势的单圈贡献为:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1^\beta(v^2) &= \int d\nu \Gamma^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) + \int d\nu [\Gamma^{*(1)}(\omega = 0, \mathbf{k} \rightarrow 0) - \Gamma^{(1)}(\omega = 0, \mathbf{k} \rightarrow 0)] \\ &= V_1^\beta(v^2) + \Delta \bar{V}_1^\beta(v^2) \end{aligned} \quad (7)$$

这里 $V_1^\beta(v^2)$ 即为通常的单圈有效势的贡献, 而 $\Delta \bar{V}_1^\beta(v^2)$ 是考虑硬热圈的贡献所引起的修正。且有

$$\begin{aligned} V_1^\beta(v^2) &= \int d\nu \Gamma^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) \\ &= 3(2\lambda\nu) \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_1^2} + 6\lambda\nu \\ &\quad \cdot \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_1^2} + 6 \left(\frac{g^2\nu}{2} \right) \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_w^2} + 3 \left(\frac{g^2 + g'^2}{2} \nu \right) \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_z^2} \\ &\quad - 12 \left(\frac{f^2\nu}{2} \right) \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_t^2} \\ &= V_1^0(v^2) + V_1^T(v^2). \end{aligned} \quad (8a)$$

其中采用文献[2,3]中的常用技巧将零温部分 $V_1^0(v^2)$ 与有限温度部分 $V_1^T(v^2)$ 分开。紫外发散包含在 $V_1^0(v^2)$ 中, 可用 \overline{MS} 重整化方案对其重整化。这是通常零温场论中已经讨论清楚了。取重整化标度为 $Q^2 = M^2$, 则

$$V_1^0(v^2) = 3f(m_1) + f(m_4) + 6f(m_w) + 3f(m_z) - 12f(m_t). \quad (8b)$$

其中

$$f(m_x) = \frac{m_x^4}{64\pi^2} \ln \left(\frac{m_x^2}{M^2} - \frac{3}{2} \right),$$

而与温度相关的单圈修正为

$$V_1^T(v^2) = 3p(m_1) + p(m_4) + 6p(m_W) + 3p(m_Z) - 12q(m_t). \quad (8c)$$

这里

$$p(m_x) = \frac{T}{2\pi^2} \int dk k^2 \ln [1 - \exp(-\beta(k^2 + m_x^2)^{\frac{1}{2}})],$$

$$q(m_t) = \frac{T}{2\pi^2} \int dk k^2 \ln [1 + \exp(-\beta(k^2 + m_t^2)^{\frac{1}{2}})].$$

在高温极限下, $m_x^2/T^2 \ll 1$, 可将 $p(m_x)$ 和 $q(m_t)$ 作高温展开^[2,3], 展开后得

$$V_{\text{eff}}^\beta(v^2) = V^0(v^2) + V_1^\beta(v^2)$$

$$= -\frac{c^2}{2} v^2 + \frac{\lambda}{4} v^4 - \frac{47\pi^2 T^4}{180} + \frac{T^2}{24} (3m_1^2 + m_4^2 + 6m_W^2 + 3m_Z^2 + 6m_t^2)$$

$$- \frac{T}{12\pi} (3m_1^3 + m_4^3 + 6m_W^3 + 3m_Z^3)$$

$$- \frac{1}{64\pi^2} (3m_1^4 + m_4^4 + 6m_W^4 + 3m_Z^4 - 12m_t^4) \ln \frac{M^2}{T^2} + \dots \quad (9)$$

硬热圈引起的修正为 $\Delta \bar{V}_1^\beta(v^2)$:

$$\Delta \bar{V}_1^\beta(v^2) = \int d\nu \Gamma^{*(1)}(\omega = 0, \mathbf{k} \rightarrow 0) - \int d\nu \Gamma^{(1)}(\omega = 0, \mathbf{k} \rightarrow 0). \quad (10)$$

有关的带硬热圈的有效传播子如图 2 所示

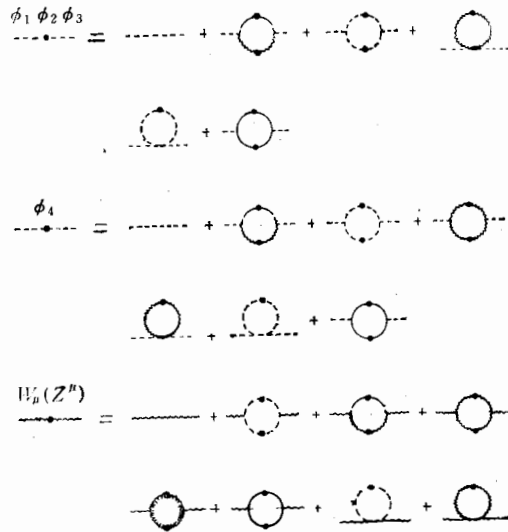


图 2 有效传播子的费曼图

虚线表示 Higgs 场, 波浪线表示规范场, 螺旋线表示鬼场, 实线表示费米场。

且有:

$$\Delta_j^*(k, m_j) = \Delta_j(k, m_j) + \pi_j,$$

$$\Gamma_j^* = \Gamma_j + \frac{d\pi_j}{d\nu}, \quad (11)$$

$$\bar{m}_j^2 = m_j^2 + \pi_j \quad (j = 1, 2, 3, 4, W_L, W_T, Z_L, Z_T).$$

在朗道规范下计算相应自能图中的硬热圈贡献,取红外极限 $\omega_n = 0, k \rightarrow 0$ 后得到

$$\begin{aligned}\pi_\alpha &= \frac{8\lambda + 3g^2 + g'^2 + 4f_c^2}{16} T^2 \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4), \\ \pi_{\text{WL}} &\simeq \frac{11}{6} g^2 T^2, \pi_{\text{WT}} \simeq 0, \\ \pi_{\text{ZL}} &\simeq \frac{11}{6} (g^2 + g'^2) T^2, \pi_{\text{ZT}} \simeq 0.\end{aligned}\quad (12)$$

这里“ \simeq ”指硬热圈的贡献,只保留到 $(\lambda, g^2) T^2$ 级.

由(10),(11)和(12)式得:

$$\begin{aligned}\Delta \bar{V}_i^\beta(v^2) &= 3 \int d\nu \left(2\lambda\nu + \frac{d\pi_1}{d\nu} \right) \frac{T}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_1^2 + \pi_1} \\ &+ \int d\nu \left[6\lambda\nu + \frac{d\pi_4}{d\nu} \right] \frac{T}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_4^2 + \pi_4} \\ &+ 2 \int d\nu \left[\frac{g^2}{2} \nu + \frac{d\pi_{\text{WL}}}{d\nu} \right] \frac{T}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_{\text{W}}^2 + \pi_{\text{WL}}} \\ &+ 4 \int d\nu \left[\frac{g^2}{2} \nu + \frac{d\pi_{\text{WT}}}{d\nu} \right] \frac{T}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_{\text{W}}^2 + \pi_{\text{WT}}} \\ &+ \int d\nu \left[\frac{g^2 + g'^2}{2} \nu + \frac{d\pi_{\text{ZL}}}{d\nu} \right] \frac{T}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_{\text{Z}}^2 + \pi_{\text{ZL}}} \\ &+ 2 \int d\nu \left[\frac{g^2 + g'^2}{2} \nu + \frac{d\pi_{\text{ZT}}}{d\nu} \right] \frac{T}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m_{\text{Z}}^2 + \pi_{\text{ZT}}} \\ &- \int d\nu \Gamma^{(1)}(\omega = 0, k \rightarrow 0) \\ &= -\frac{T}{12\pi} [(3\bar{m}_1^3 + \bar{m}_4^3 + 2\bar{m}_{\text{WL}}^3 + 4\bar{m}_{\text{WT}}^3 + \bar{m}_{\text{ZL}}^3 + 2\bar{m}_{\text{ZT}}^3) \\ &- (3m_1^3 + m_4^3 + 6m_{\text{W}}^3 + 3m_{\text{Z}}^3)].\end{aligned}\quad (13)$$

将(9)式和(13)式相加得高温下的有效势:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{\text{eff}}^\beta(v^2) &= -\frac{c^2}{2} v^2 + \frac{\lambda}{4} v^4 - \frac{47\pi^2}{180} T^4 \\ &+ \frac{T^2}{24} (3m_1^2 + m_4^2 + 6m_{\text{W}}^2 + 3m_{\text{Z}}^2 + 6m_c^2) \\ &- \frac{T}{12\pi} (3\bar{m}_1^3 + \bar{m}_4^3 + 2\bar{m}_{\text{WL}}^3 + 4\bar{m}_{\text{WT}}^3 + \bar{m}_{\text{ZL}}^3 + 2\bar{m}_{\text{ZT}}^3) - O\left(\ln \frac{M^2}{T^2}\right).\end{aligned}\quad (14)$$

若考虑中性流 j_0 与 Z_μ 的耦合,则对有效势的修正为^[3]:

$$\Delta V^i(v^2) = \frac{g^2 + g'^2}{4} \frac{j_0^2}{2\bar{m}_{\text{Z}}^2}.$$

而

$$\bar{m}_{\text{Z}}(v^2) = m_{\text{Z}}^2 + \frac{11}{6} (g^2 + g'^2) T^2.$$

因此

$$\Delta V^i(v^2) = -\frac{j_0^2}{2v^2 + \frac{44}{3}T^2}. \quad (15)$$

将(14)式与(15)式相加得到高温高密下的有效势

$$\bar{V}^{Bt}(v^2) = \frac{\alpha}{2}(T^2 - T_0^2)v^2 - BT + \frac{\lambda}{4}v^4 + \frac{j_0^2}{2v^2 + \frac{44}{3}T^2} \quad (16)$$

其中

$$B = \frac{1}{12\pi} \left\{ 3[\alpha(T^2 - T_0^2) + \lambda v^2]^{3/2} + [\alpha(T^2 - T_0^2) + 3\lambda v^2]^{3/2} \right. \\ \left. + 4\left(\frac{1}{4}g^2 v^2\right)^{3/2} + 2\left(\frac{g^2 + g'^2}{4}v^2\right)^{3/2} + 2\left(\frac{g^2}{4}v^2 + \beta^2 T^2\right)^{3/2} \right. \\ \left. + \left(\frac{g^2 + g'^2}{4}v^2 + \gamma^2 T^2\right)^{3/2} \right\} \\ \alpha = \frac{8\lambda + 3g^2 + g'^2 + 4f_t^2}{16}, \beta^2 = \frac{11}{6}g^2, \gamma^2 = \frac{11}{6}(g^2 + g'^2), \\ T_0 = \frac{16c^2}{8\lambda + 3g^2 + g'^2 + 4f_t^2} \quad (17)$$

当 $T \geq T_0$ 时, $\bar{V}_{\text{eff}}^{Bt}$ 均为实值.

3 数值结果及一级弱电相变

在(16)式中按硬热圈重求和的方法给出了标准模型在高温高密下的有效势到 $(\lambda^{\frac{1}{2}}, g^3, g'^3)$. 当选取 $v_0 = 246\text{GeV}$, $g = 0.637$, $g' = 0.344$, $m_t = 135\text{GeV}$, $j_0 = 100(\text{GeV})^2$ 时, $T_0 = 88.1\text{GeV}$. 按(16)式, 有效势在临界温度附近的四条曲线给出在图3中.

从图3可看出, 当 $T = T_1 = 93.65\text{GeV}$ 时, 有效势对应两个极小点. $v = 0$ 所对应的是亚稳态. $v = 44\text{GeV}$ 所对应的是有效势的最小值, 对称性是自发破缺的. 随着温度的逐渐升高, $v \neq 0$ 处所对应的极小值逐渐升高, 当 $T = T_{c_1} = 93.67\text{GeV}$ 时, 两个极小值简并, 系统处于两相共存. 当温度继续升高到 $T = T_2 = 93.69\text{GeV}$ 时, $v = 40\text{GeV}$ 处对应的是有效势的局域极小值, 是亚稳态. 直到温度上升至 $T = T_{c_2} = 94\text{GeV}$ 时, 有效势只有 $v = 0$ 处的一个最小值, 对称性得到恢复. 由于从对称性的自发破缺相到对称相经历了两相共存阶段, 因

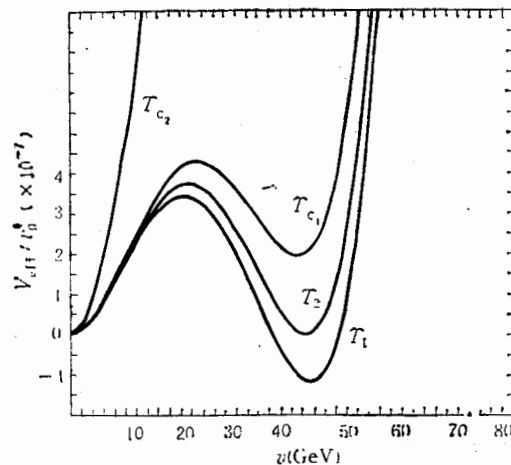


图3 不同温度下的有限势

而清楚表明这种相变是一级相变。这与文献[5]的结论一致。

从有效势(16)式可看出,当 $T \geq T_0$ 时,有效势为实数。若抽掉硬热圈的贡献,即令

(16)式中 $B(T)$ 中的 $T = 0$,则

当 v 很小,如 $v^2 < \frac{\alpha}{\lambda} T_0^2$ 时, B

为虚数,使有效势没有意义。另一方面从(11)式可知,当 $T \geq T_0$

时,规范场及 Higgs 玻色子的质量均不为零(如图4所示)。若抽

掉硬热圈的贡献,即令(11)式中

$\pi_i = 0$,则当 $T \geq T_0$ 时 $m_i^2 = 0$,

导致红外发散。这表明采用本文

的计算方法能克服这两方面的困难^[2,3]。

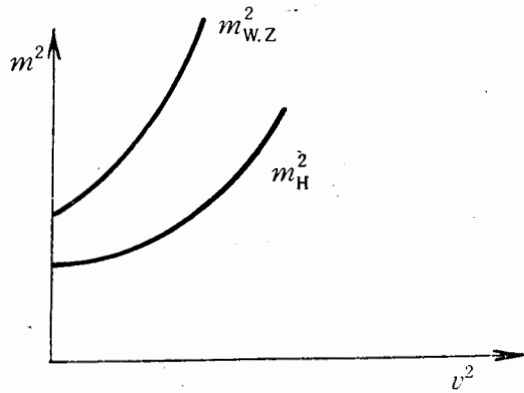


图4 $T > T_0$ 时,玻色场的质量平方

如果改变 Higgs 粒子的质量及 t 夸克的质量,可发现在微扰论成立范围内相变的特性不变,只是临界温度发生改变。

还要指出的是,本文只计算到了 $(\lambda^{\frac{3}{2}}, g^3)$ 级,到下一级 (g^4, λ^2) , 是否会有新的问题出现呢? 相变的性质有何改变? 这有待今后进一步探讨。

感谢 Y. Fujimoto 教授和王恩科教授的有益讨论。

参 考 文 献

- [1] V.A. Kuzimin, V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.*, **B155**(1985)36; M.Dine, O. Lechtenfeld et al., *Nucl. Phys.*, **B342**(1990)381.
- [2] L. Dolan and R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D9**(1974)3320; Sidney Coleman and Erick Weinberg, *Phys. Rev.*, **D7**(1973)1888.
- [3] Hou Defu and Li Jiarong, *High Energy And Nuclear Physics*, **15**(1991)207.
- [4] R.D. Pisarski, *Physica*, **A158**(1989)246; *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989)1129.
- [5] G.A. Camelia and So-Young Pi, *Phys. Rev.*, **D46**(1993)2356; M.E. Carrington, *Phys. Rev.*, **D45**(1992)2933.
- [6] Y. Fujimoto, R. Grigjanis, and R. Kobes, *Prog. Theor. Phys.*, **73**(1985)434; S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D7**(1973)2887.

The Self-consistent Study of Electroweak Transition

Hou Defu Li Jiarong

(*Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070*)

Received on October 29, 1993

Abstract

By using the resummation of the hard thermal loops in the tadpole diagrams, the effective potential of order $(\lambda^{2/3}, g^3, g'^3)$ is consistently calculated in the standard model with neutral current at high temperature and the difficulties in the naive calculation are overcome. It is proved that the electroweak transition is of the first-order and the critical temperature is given.

Key words effective potential, hard thermal loops, phase transition.