第19卷 第10期　　高能物理与核物理　　Vol. 19, No. 10
1995年10月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Oct., 1995

有限温度下无质量 φ^3 理论中角度红外发散的正规化*

陈相君　刘连寿
(华中师范大学粒子物理研究所　武汉　430070)
1994-11-11 收稿

摘　　要

讨论了无质量标量场 φ^3 理论三圈真空图中的角度红外发散以及它的维数正规化方案，并给出了它在D维空间的解析表达式.

关键词　无质量标量场，真空图，角度红外发散，维数正规化，解析表达式.

1　引　　言

在场论的微扰计算中，无质量场存在红外发散. 在有限温度下，红外发散更严重. 近年来的计算说明，在高圈情况下，出现一些新的特点. Y. Fujimoto 计算了无质量标量场 φ^4 理论的三圈真空图，图1(a). 并指出在维数正规化方案下，零温部分的红外发散和有限温度下的红外发散相互抵消. 因而重整化不需要考虑红外发散，而只须考虑紫外发散[1]. 本文把 Y. Fujimoto 的思想应用到无质量标量场 φ^3 理论，计算了它的和 φ^4 理论相似的三圈真空图，图1(b). 由于图1(b)中含有6个传播子，因此它的计算比图1(a)复杂的多. 在计算中，我们碰到了 φ^4 理论没有的问题，即有角度积分的红外发散. φ^4 理论中也有角度积分，但不是发散积分.

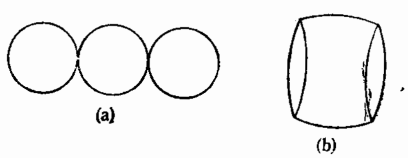
(a)　(b)

图　1

无质量场的红外发散是比较复杂的. 有两种红外发散，一种是动量趋于0引起的红外发散；另一种是角度积分中出现的红外发散. 后者也叫共线性红外发散[2]. 在零温情况下，共线性红外发散也是存在的. 例如，在 $e^+e^-\to q\bar{q}$ 过程中，当能量很高，夸克的质量可忽略不计时，就出现了共线性红外发散[3]. 文献[2]中给出的处理这种红外发散的正规化方案是截断的方法，因而不是协变的. 本文将在维数正规化的方案下讨论这个问题，并给出发散的角度积分在D维空间的解析表达式.

* 国家自然科学基金资助.

2 图 1(b) 中的发散角度积分

用有限温度场论的实时形式进行计算，其传播子为[4]

$$\frac{\mathrm{i}}{k^2+\mathrm{i}\eta}+\frac{2\pi\delta(k^2)}{\mathrm{e}^{\beta|k_0|}-1}. \tag{1}$$

其中第一项是零温部分，第二项是有限温度部分。

费曼图图 1(b) 的整个积分为

$$\begin{aligned}I=&(-\mathrm{i}g)^4\int\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dq\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{3D}}\left(\frac{\mathrm{i}}{k^2+\mathrm{i}\eta}+\frac{2\pi\delta(k^2)}{\mathrm{e}^{\beta|k_0|}-1}\right)^2\left(\frac{\mathrm{i}}{p^2+\mathrm{i}\eta}+\frac{2\pi\delta(p^2)}{\mathrm{e}^{\beta|p_0|}-1}\right)\\&\cdot\left(\frac{\mathrm{i}}{(p+k)^2+\mathrm{i}\eta}+\frac{2\pi\delta[(p+k)^2]}{\mathrm{e}^{\beta|p_0+k_0|}-1}\right)\left(\frac{\mathrm{i}}{q^2+\mathrm{i}\eta}+\frac{2\pi\delta(q^2)}{\mathrm{e}^{\beta|q_0|}-1}\right)\\&\cdot\left(\frac{\mathrm{i}}{(q+k)^2+\mathrm{i}\eta}+\frac{2\pi\delta[(q+k)^2]}{\mathrm{e}^{\beta|q_0+k_0|}-1}\right)\\=&-g^4\int\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dq\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{3D}}\frac{1}{(k^2)^2p^2(p+k)^2q^2(q+k)^2}+(T\neq0\ \text{部分}).\end{aligned} \tag{2}$$

这里 $D=4-\varepsilon$。公式(2)右边的第一项为 $T=0$ 部分。在计算它时，应用费曼参数化积分，不涉及到角度积分。因而也不存在角度红外发散问题。在有限温度部分中，由于存在热传播子，热传播子中含 δ 函数，因而在计算时，不能仅仅用费曼参数化积分，所以，存在着角度积分。有些角度积分是平庸的，明显为 0 的，我们这里不列举。含有不为 0 的角度积分且是给出实部的项对应的费曼图为图 2 的(a)—(c)。其中—/—代表热传播子。先计算图 2(a)。

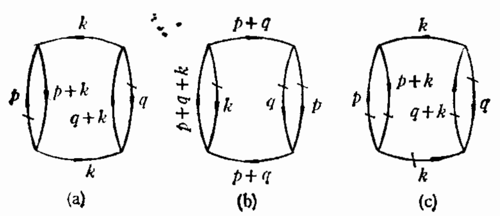

图 2

$$\begin{aligned}I_a=&(-\mathrm{i}g)^4\int\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dq\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{3D}}\frac{\mathrm{i}^4}{(p+k)^2(q+k)^2(k^2)^2}\cdot\frac{2\pi\delta(p^2)}{\mathrm{e}^{\beta|p_0|}-1}\cdot\frac{2\pi\delta(q^2)}{\mathrm{e}^{\beta|q_0|}-1}\\=&g^4\int\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dq\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{3D}}\int_0^1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ \frac{z\Gamma(4)\delta(x+y+z-1)}{[k^2+p^2x(1-x)+q^2y(1-y)-2pqxy]^4}\\&\cdot\frac{2\pi\delta(p^2)}{\mathrm{e}^{\beta|p_0|}-1}\frac{2\pi\delta(q^2)}{\mathrm{e}^{\beta|q_0|}-1}\\=&\frac{\mathrm{i}g^4\Gamma\left(2+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}}\int_0^1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ \frac{z\delta(x+y+z-1)}{(xy)^{2+\frac{\varepsilon}{2}}}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}\boldsymbol{p}\mathrm{d}^{D-1}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^{2D-2}}\\&\cdot\frac{1}{2^3}\frac{1}{|\boldsymbol{p}|^{3+\frac{\varepsilon}{2}}|\boldsymbol{q}|^{3+\frac{\varepsilon}{2}}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{p}|}-1}\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{q}|}-1}\left(\frac{1}{(1-\cos\theta)^{2+\frac{\varepsilon}{2}}}+(-1)^{2+\frac{\varepsilon}{2}}\right.\\&\left.\cdot\frac{1}{(1+\cos\theta)^{2+\frac{\varepsilon}{2}}}\right).\end{aligned} \tag{3}$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 之间的夹角．这里出现了关于角度的积分，在通常的意义下，它是发散的．因为 $\cos\theta=1$ 或 $\cos\theta=-1$ 分别是被积函数的奇点．

零温情况下，在 $e^+e^-\to q\bar{q}$ 过程中，夸克的质量忽略时，外动量满足 $p^2=0$ 的质壳关系，这时也出现发散的角度积分．这里是真空图计算，没有外动量，内动量不受质壳关系限制，故不出现角度积分．图 2(a) 是在有限温度下，动量 p 和动量 q 处于热传播子状态，有 $\delta(p^2)$ 和 $\delta(q^2)$ 限制，要满足质壳关系，故在积分中也存在发散的角度积分．

图 2(b) 的计算为

$$
\begin{aligned}
I_b=&(-ig)^4\int\frac{d^Dpd^Dqd^Dk}{(2\pi)^{3D}}\frac{i^3}{(p+q)^4(p+q+k)^2}\cdot\frac{2\pi\delta(p^2)}{e^{\beta|p_0|}-1}\cdot\frac{2\pi\delta(q^2)}{e^{\beta|q_0|}-1}\\
&\cdot\frac{2\pi\delta(k^2)}{e^{\beta|k_0|}-1}=-ig^4\int\frac{d^{D-1}\boldsymbol{p}d^{D-1}\boldsymbol{q}d^{D-1}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^{3D-3}}\frac{1}{2^5|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}||\boldsymbol{k}|}\frac{1}{e^{\beta|\boldsymbol{p}|}-1}\\
&\cdot\frac{1}{e^{\beta|\boldsymbol{q}|}-1}\frac{1}{e^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}\times\left[\frac{1}{\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{q}^2(1-\cos\theta)^2}\right.\\
&\cdot\left(\frac{1}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1-\cos\theta)+(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}||\boldsymbol{k}|\cos\theta_k}\right.\\
&\left.+\frac{1}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1-\cos\theta)-(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}||\boldsymbol{k}|\cos\theta_k}\right)\\
&+\frac{1}{\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{q}^2(1+\cos\theta)^2}\\
&\times\left(\frac{1}{-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1+\cos\theta)+(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}||\boldsymbol{k}|\cos\theta_k}\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1+\cos\theta)-(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}||\boldsymbol{k}|\cos\theta_k}\right)\right]. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

这里 θ 是 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 之间的夹角，θ_k 是 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ 之间的夹角．公式(4)含有很复杂的角度积分，$\cos\theta=1$ 或 $\cos\theta=-1$ 分别是被积函数的奇点．为了便于判断发散，我们寻找在奇点附近的渐近函数形式．把被积函数在奇点附近展开，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1-\cos\theta)+(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}||\boldsymbol{k}|\cos\theta_k}\\
&+\frac{1}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1-\cos\theta)-(|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|)|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}||\boldsymbol{k}|\cos\theta_k}\\
=&\frac{1}{a_+|\boldsymbol{k}|(1-\cos\theta_k)}\left(1-\frac{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1-\cos\theta)}{a_+|\boldsymbol{k}|(1-\cos\theta_k)}\right.\\
&\left.+\frac{\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{q}^2(1-\cos\theta)^2}{a_+^2\boldsymbol{k}^2(1-\cos\theta_k)^2}-\cdots\right)-\frac{1}{a_+|\boldsymbol{k}|(1+\cos\theta_k)}\\
&\cdot\left(1+\frac{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1-\cos\theta)}{a_+|\boldsymbol{k}|(1+\cos\theta_k)}+\frac{\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{q}^2(1-\cos\theta)^2}{a_+^2\boldsymbol{k}^2(1+\cos\theta_k)^2}+\cdots\right)\\
=&-\frac{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1-\cos\theta)}{a_+^2\boldsymbol{k}^2(1-\cos\theta_k)^2}-\frac{2|\boldsymbol{p}|^3|\boldsymbol{q}|^3(1-\cos\theta)^3}{a_+^4\boldsymbol{k}^4(1-\cos\theta_k)^4}-\cdots. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

公式(5)是在 $\cos\theta=1$ 点展开的，有 $|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{p}|+|\boldsymbol{q}|=a_+$，并考虑了

$$\int \frac{\mathrm{d}\Omega_k}{(1-\cos\theta_k)^N} = \int \frac{\mathrm{d}\Omega_k}{(1+\cos\theta_k)^N}, N=1,2,\cdots. \tag{6}$$

同理有,

$$\frac{1}{-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1+\cos\theta)+(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}||\boldsymbol{k}|\cos\theta_k}$$
$$+\frac{1}{-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1+\cos\theta)-(|\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}|)|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}||\boldsymbol{k}|\cos\theta_k}$$
$$=\frac{2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1+\cos\theta)}{a_-^2\boldsymbol{k}^2(1-\cos\theta_k)^2}+\frac{2|\boldsymbol{p}|^3|\boldsymbol{q}|^3(1+\cos\theta)^3}{a_-^4\boldsymbol{k}^4(1-\cos\theta_k)^4}+\cdots. \tag{7}$$

公式(7)是在 $\cos\theta=-1$ 点展开的,有 $|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}|=||\boldsymbol{p}|-|\boldsymbol{q}||=|a_-|$,也考虑了公式(6).

于是,I_b 在奇点附近的渐近形式为

$$I_b=-\mathrm{i}g^4\int\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{p}|\mathrm{d}|\boldsymbol{q}|\mathrm{d}|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^{3D-3}}\mathrm{d}\Omega_p\mathrm{d}\Omega_q\mathrm{d}\Omega_k\frac{|\boldsymbol{p}|^{-\varepsilon}|\boldsymbol{q}|^{-\varepsilon}|\boldsymbol{k}|^{-1-\varepsilon}}{2^4}\left(\frac{1}{a_-^2}-\frac{1}{a_+^2}\right)$$
$$\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{p}|}-1}\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{q}|}-1}\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}\frac{1}{(1-\cos\theta)}\frac{1}{(1-\cos\theta_k)^2}+\cdots. \tag{8}$$

这里也含有发散的角度积分.

图 2(c) 的计算为

$$I_c=(-\mathrm{i}g)^4\int\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dq\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{3D}}\frac{\mathrm{i}}{k^2+\mathrm{i}\eta}\frac{2\pi\delta(k^2)}{\mathrm{e}^{\beta|k_0|}-1}\cdot\frac{2\pi\delta(p^2)}{\mathrm{e}^{\beta|p_0|}-1}\frac{2\pi\delta(q^2)}{\mathrm{e}^{\beta|q_0|}-1}$$
$$\cdot\frac{2\pi\delta[(p+k)^2]}{\mathrm{e}^{\beta|p_0+k_0|}-1}\cdot\frac{2\pi\delta[(q+k)^2]}{\mathrm{e}^{\beta|q_0+k_0|}-1}. \tag{9}$$

公式(9)中含有

$$\frac{1}{k^2+\mathrm{i}\eta}2\pi\delta(k^2). \tag{10}$$

它是奇异的. 用恒等式[5]

$$\frac{2}{k^2+\mathrm{i}\eta}\cdot 2\pi\delta(k^2)=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}^2}2\pi\delta(k^2)-\mathrm{i}4\pi^2\delta^2(k^2), \tag{11}$$

把它去掉. 当把公式(11)代入公式(9)时,公式(11)右边的第二项给出虚部,不考虑它. 于是,有

$$I_c=\frac{\mathrm{i}g^4}{2}\int\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dq\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{3D-5}}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}^2}\frac{\delta(k^2)}{\mathrm{e}^{\beta|k_0|}-1}\right)\frac{\delta(p^2)}{\mathrm{e}^{\beta|p_0|}-1}\frac{\delta[(p+k)^2]}{\mathrm{e}^{\beta|p_0+k_0|}-1}$$
$$\cdot\frac{\delta(q^2)}{\mathrm{e}^{\beta|q_0|}-1}\frac{\delta[(q+k)^2]}{\mathrm{e}^{\beta|q_0+k_0|}-1}$$
$$=\mathrm{i}g^4\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^{3D-5}}\frac{\mathrm{d}\Omega_p\mathrm{d}\Omega_q\mathrm{d}\Omega_k}{4^3\beta^2}\left(\frac{\partial}{\partial|\boldsymbol{k}|}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}\right)\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^{1+\varepsilon}}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}\right)^2$$
$$\cdot\left(\frac{1}{1-\cos\theta_p}\frac{1}{1-\cos\theta_q}+\frac{1}{1+\cos\theta_p}\frac{1}{1+\cos\theta_q}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1-\cos\theta_p}\frac{1}{1+\cos\theta_q}+\frac{1}{1+\cos\theta_p}\frac{1}{1-\cos\theta_q}\right). \tag{12}$$

它也含有发散的角度积分．这里 θ_p 是 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 之间的交角．θ_q 是 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 之间的交角．

3　发散角度积分的正规化

上节我们计算了图 2 中的 3 个费曼图的积分，都含有发散的角度积分．这些积分的一般形式为

$$\int \frac{\mathrm{d}\Omega}{(1-\cos\theta)^N}, N \geqslant 1. \tag{13}$$

积分在 $\cos\theta = 1$ 点是发散的．我们要在维数正规化方案下对它正规化，找寻它在 D 维空间的解析表达式．

对于无质量场，维数正规化方案规定[2]

$$\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2)^N} = 0, N \geqslant 2, 2N - D > 0. \tag{14}$$

这个公式等效于

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{k^{2N-3+\varepsilon}} = 0. \tag{15}$$

由公式(15)，可推出

$$\int_0^1 \mathrm{d}k \frac{1}{k^{2N-3+\varepsilon}} = -\int_1^\infty \mathrm{d}k \frac{1}{k^{2N-3+\varepsilon}} = \frac{1}{-2N+4-\varepsilon}. \tag{16}$$

令 $2N - 3 + \varepsilon = Z$，有

$$\int_0^1 \mathrm{d}k \frac{1}{k^Z} = \frac{1}{1-Z}, Z > 1. \tag{17}$$

公式(17)也可用 β 函数表示之，有

$$\int_0^1 \mathrm{d}k \frac{1}{k^Z} = B(1-Z, 1) = \frac{\Gamma(1-Z)\Gamma(1)}{\Gamma(2-Z)}. \tag{18}$$

在维数正规化方案下，

$$\mathrm{d}\Omega = \prod_{l=1}^{D-2} \sin^{D-2-l}\theta_l \mathrm{d}\theta_l = \sin^{1-\varepsilon}\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \tag{19}$$

于是，有

$$\int \frac{\mathrm{d}\Omega}{(1-\cos\theta)^N} = 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin^{1-\varepsilon}\theta \mathrm{d}\theta}{(1-\cos\theta)^N} = 2\pi \int_0^\pi \frac{(1-\cos^2\theta)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \mathrm{d}(-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)^N}, \tag{20}$$

经过一些数学推导，公式(20)变为

$$\int \frac{\mathrm{d}\Omega}{(1-\cos\theta)^N} = \frac{2\pi}{2^{N-1+\varepsilon}} \int_0^1 \mathrm{d}x x^{-\frac{\varepsilon}{2}} (1-x)^{-\frac{\varepsilon}{2}-N}$$

$$= \frac{2\pi}{2^{N-1+\varepsilon}} \frac{\Gamma\left(1-N-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(2-N-\varepsilon)}. \tag{21}$$

这就是发散角度积分在 D 维空间的解析表达式，实现了发散角度积分的正规化．从公式

(21)看出，只有$N=1$时，有角度红外发散。

在 I_a、I_b 和 I_c 中运用公式(21)，有

$$I_a=-\frac{3ig^4}{2^{11}\pi^6}\int_0^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ \frac{z\delta(x+y+z-1)}{(xy)^{2+\frac{\varepsilon}{2}}}\int_0^\infty \mathrm{d}p\mathrm{d}q\ \frac{p^{-1-\frac{3\varepsilon}{2}}}{e^{\beta p}-1}\frac{q^{-1-\frac{3\varepsilon}{2}}}{e^{\beta q}-1}+\cdots, \quad (22)$$

$$I_b=\frac{ig^4}{2^9\pi^6}\int_0^\infty \mathrm{d}p\mathrm{d}q\mathrm{d}k\ \frac{1}{e^{\beta p}-1}\frac{1}{e^{\beta q}-1}\left(\frac{1}{a_-^2}-\frac{1}{a_+^2}\right)\frac{k^{-1-\varepsilon}}{e^{\beta k}-1}\Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\cdots, \quad (23)$$

$$I_c=\frac{ig^4}{2^7\pi^4}\int_0^\infty \mathrm{d}k\,\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\partial}{\partial k}\frac{1}{k}\frac{1}{e^{\beta k}-1}\right)\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}\left(\frac{1}{e^{\beta k}-1}\right)^2\Gamma^2\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\cdots, \quad (24)$$

I_a 中无角度红外发散，I_b 中有一个角度红外发散，I_c 中含有两个角度红外发散。另外，I_a、I_b 和 I_c 中还含有其它形式的红外发散。如 I_a 中含零温部分的红外发散和有限温度红外发散，I_b 和 I_c 中也还含有限温度的红外发散。关于有限温度下红外发散的寻找见参考文献[6]。考虑这些红外发散后，有

$$I_a=-\frac{ig^4}{3\times 2^9\pi^6}\frac{1}{\varepsilon^3}+\cdots, \quad (25)$$

$$I_b=\frac{-ig^4}{2^9\pi^6}\int_0^\infty \mathrm{d}p\mathrm{d}q\ \frac{1}{e^{\beta p}-1}\frac{1}{e^{\beta q}-1}\left(\frac{1}{a_-^2}-\frac{1}{a_+^2}\right)\frac{1}{\varepsilon^2}+\cdots, \quad (26)$$

$$I_c=\frac{-ig^4}{15\times 2^{10}\pi^4}\frac{1}{\varepsilon^3}+\cdots. \quad (27)$$

公式(25)—(27)只给出了红外发散的最高次幂。

4 直到三圈其它真空图的角度红外发散

上面讨论了在计算三圈真空图图 1(b) 碰到的角度发散积分及其正规化问题。无质量标量场 φ^3 理论还有一个三圈真空图，如图 3(c)。考虑直到三圈真空图时，还有一个单圈真空图和一个双圈真空图，见图 3(a)、(b)。那么它们的角度红外发散怎样呢？我们计算了它们，发现单圈真空图和双圈真空图不存在发散的角度积分，因而没有角度红外发散。另一个三圈真空图(图 3(c))存在发散的角度积分。

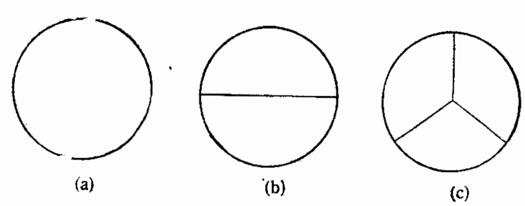

图 3

图 3(c) 中给出实部并含有发散角度积分的项有四个，它们分别对应图 4 的四个费曼图。图 4(a)、(b) 的计算中含有的发散角度积分和图 2(a) 一样，可用(21)式进行正规化。正规化后，不含有角度红外发散。图 4(c)、(d) 的发散角度积分复杂一些，它的正规化除用(21)式外，还要用到(20)式的另外一种形式——渐近展开形式。

在(20)式中，$\theta=0$ 是被积函数的奇点。在 $\theta=0$ 点展开被积函数，考虑它的渐近形式后有

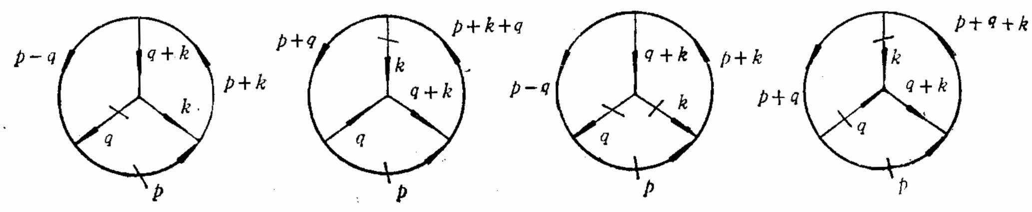

图 4

$$\int\frac{\mathrm{d}\Omega}{(1-\cos\theta)^N}=2\pi\int_0^\pi\frac{\sin^{1-\varepsilon}\theta\mathrm{d}\theta}{(1-\cos\theta)^N}\sim 2\pi\int_0^1\frac{\theta^{1-\varepsilon}\mathrm{d}\theta}{\left(\frac{\theta^2}{2}\right)^N}=\frac{2\pi 2^N}{2-2N-\varepsilon}. \tag{28}$$

当 $N=1$ 时存在角度红外发散并和(21)式给出的结果一致．它就是渐近展开形式．

对应图 4(c) 的计算为

$$\begin{aligned}
I'_c &= (-\mathrm{i}g)^4\int\frac{\mathrm{d}^Dp\mathrm{d}^Dq\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^{3D}}\frac{2\pi\delta(p^2)}{\mathrm{e}^{\beta|p_0|}-1}\frac{2\pi\delta(q^2)}{\mathrm{e}^{\beta|q_0|}-1}\frac{2\pi\delta(k^2)}{\mathrm{e}^{\beta|k_0|}-1}\\
&\quad\cdot\frac{\mathrm{i}^3}{(p+k)^2(q+k)^2(p-q)^2}\\
&=\frac{\mathrm{i}g^4}{32}\int\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{p}|\mathrm{d}|\boldsymbol{q}|\mathrm{d}|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^{3D-3}}\mathrm{d}\Omega_p\mathrm{d}\Omega_q\mathrm{d}\Omega_k\frac{|\boldsymbol{p}|^{-1-\varepsilon}}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{p}|}-1}\frac{|\boldsymbol{q}|^{-1-\varepsilon}}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{q}|}-1}\frac{|\boldsymbol{k}|^{-1-\varepsilon}}{\mathrm{e}^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}\\
&\quad\times\left(\frac{1}{(1-\cos\theta_p)(1-\cos\theta_q)(1-\cos\theta_{pq})}\right.\\
&\quad+\frac{1}{(1+\cos\theta_p)(1+\cos\theta_q)(1-\cos\theta_{pq})}\\
&\quad+\frac{1}{(1-\cos\theta_p)(1+\cos\theta_q)(1+\cos\theta_{pq})}\\
&\quad\left.+\frac{1}{(1+\cos\theta_p)(1-\cos\theta_q)(1+\cos\theta_{pq})}\right)
\end{aligned} \tag{29}$$

其中 θ_p 是 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 之间的夹角，θ_q 是 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 之间的夹角，θ_{pq} 是 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 之间的夹角．

$$\cos\theta_{pq}=\sin\theta_p\sin\theta_q\cos(\varphi_p-\varphi_q)+\cos\theta_p\cos\theta_q \tag{30}$$

(29)式中的角度积分是发散的，因为 $\cos\theta_p=1$ 或 $\cos\theta_p=-1$ 分别是被积函数的奇点．因而我们需要找出它在奇点附近的渐近形式．对于 $\cos\theta_p=1$ 的奇点，在 $\theta_p=0$ 点展开．对于 $\cos\theta_p=-1$ 的奇点，先进行 $\theta'_p=\pi-\theta_p$ 变换，再在 $\theta'_p=0$ 点展开．由于 $\cos\theta_q=1$ 或 $\cos\theta_q=-1$ 也分别是被积函数的奇点，也需要找出在它们附近的渐近形式．但因被积函数对于 $\cos\theta_p$ 和 $\cos\theta_q$ 有对称性，所以，考虑两种奇点时是仅考虑一种奇点时的 2 倍．于是有

$$I'_c=\frac{\mathrm{i}g^4}{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{p}|\mathrm{d}|\boldsymbol{q}|\mathrm{d}|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^{3D-3}}\mathrm{d}\Omega_k\mathrm{d}\Omega_q 2\pi\theta_p^{1-\varepsilon}\mathrm{d}\theta_p$$

$$\frac{|\boldsymbol{p}|^{-1-\varepsilon}}{e^{\beta|\boldsymbol{p}|}-1}\frac{|\boldsymbol{q}|^{-1-\varepsilon}}{e^{\beta|\boldsymbol{q}|}-1}\frac{|\boldsymbol{k}|^{-1-\varepsilon}}{e^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}\left(\frac{1}{\theta_p^2}\frac{1}{(1-\cos\theta_q)^2}\right)+\cdots$$

$$=\frac{ig^4}{2^9\pi^6}\frac{1}{\varepsilon^4}+\cdots. \tag{31}$$

对费曼图图 4(d) 进行计算，和 I'_c 情况相似，有

$$I'_d=(-ig)^4\int\frac{d^Dp\,d^Dq\,d^Dk}{(2\pi)^{3D}}\frac{2\pi\delta(p^2)}{e^{\beta|p_0|}-1}\frac{2\pi\delta(q^2)}{e^{\beta|q_0|}-1}\frac{2\pi\delta(k^2)}{e^{\beta|k_0|}-1}$$

$$\cdot\frac{i^3}{(p+q)^2(q+k)^2(p+q+k)^2}$$

$$=\frac{-ig^4}{32}\int_0^\infty\frac{d|\boldsymbol{p}|d|\boldsymbol{q}|d|\boldsymbol{k}|}{(2\pi)^{3D-3}}d\Omega_p d\Omega_q d\Omega_k\frac{|\boldsymbol{p}|^{-\varepsilon}}{e^{\beta|\boldsymbol{p}|}-1}\frac{|\boldsymbol{k}|^{-\varepsilon}}{e^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1}\frac{|\boldsymbol{q}|^{-1-\varepsilon}}{e^{\beta|\boldsymbol{q}|}-1}$$

$$\times\{[(1-\cos\theta_p)(1-\cos\theta_k)|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1-\cos\theta_p)+|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{k}|(1-\cos\theta_k)$$

$$+|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|(1-\cos\theta_{pk})]^{-1}+[(1+\cos\theta_p)(1+\cos\theta_k)(-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|$$

$$\times(1+\cos\theta_p))-|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{k}|(1+\cos\theta_k)+|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|(1-\cos\theta_{pk})]^{-1}$$

$$+[(1-\cos\theta_p)(1+\cos\theta_k)(-|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1-\cos\theta_p))$$

$$+|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{k}|(1+\cos\theta_k)+|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|(1+\cos\theta_{pk})]^{-1}$$

$$+[(1+\cos\theta_p)(1-\cos\theta_k)|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|(1+\cos\theta_p)$$

$$-|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{k}|(1-\cos\theta_k)+|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|(1+\cos\theta_{pk})]^{-1}\}$$

$$=-\frac{ig^4}{2^9\pi^6}\frac{1}{\varepsilon^4}+\cdots. \tag{32}$$

(31)式和(32)式也只给出了领头的发散项。虽然这两个积分的被积函数对 θ_p 和 θ_q（或 θ_k）都有奇点，但是正规化后只有一个角度出现红外发散。除了角度红外发散外，这两个积分都含有有限温度下 p、q 和 k 的红外发散，因而最高发散项是 $\frac{1}{\varepsilon^4}$ 项。因图 1(b)的红外发散最高次项是 $\frac{1}{\varepsilon^3}$ 项，所以，图 3(c) 的红外发散比图 1(b) 更严重。

5 结　论

本文讨论了无质量标量场 φ^3 理论直到三圈真空图中的角度积分。计算说明在单圈真空图和双圈真空图中不存在发散的角度积分，而在三圈真空图中存在着复杂的发散角度积分。本文并讨论了在维数正规化方案下，这些发散角度积分的正规化问题，给出了正规化的解析表达式，从而提供了一种寻找角度红外发散的方法。

作者感谢李家荣教授在本工作中给予的有益讨论。

参　考　文　献

[1] Y. Fujimoto, M. Loewe, J. C. Rojas, Dimensional Regularization at Finite Temperature, to be published in Z. Phys. C.

[2] T. Muta, Foundations of Quantum Chromodynamics——an Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories, World Scientific, 1987.

[3] 戴元本，相互作用的规范理论，科学出版社，1987.

[4] L. Dolan, R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D9** (1974) 3320.

[5] A. J. Niemi, G. W. Semenoff, *Nucl. Phys.*, **B236**(1984)181.

[6] Chen Xiangjun, Y. Fujimoto, Dimensional Regularization and Analytical Continuation at Finite Temperature, Huazhong Normal University Preprint, 1994.

Regularization of Angular Infrared Divergence of Massless φ^3 Theory at Finite Temperature

Chen Xiangjun　　Liu Lianshou

(*Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan* 430070)

Received 11 November 1994

Abstract

The angular infrared divergences of three-loop vacuum graph in the massless scalar field φ^3 theory and the scheme of dimensional regularization for these divergences are discussed. Its analytical expression in D-dimensional space is given.

Key words massless scalar field, vacuum graph, angular infrared diverdence, dimensional regularization, analytical expression.