第22卷 第1期 高能物理与核物理 Vol.22, No.1
1998年1月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jan., 1998

引力联络的 holonomy

邵常贵 陈中秋 马为川 陈怡汉 林树渊

(湖北大学物理系 武汉 430062)

摘要 利用多重张量密度构造了扩展的圈群,在时空流形上得到了扩展的 holonomy. 利用圈空间得到了引力的 holonomy. 对 $R+F^2$ 纯引力进行了经典与量子 holonomy 的计算,得到了其一个球对称解析解的经典 holonomy 的精确结果,并发现存在着曲率的量子激发,同时求得了表式.

关键词 扩展的 Loop 群 Loop空间 曲率激发

1 引 言

由 holonomy(h)得到的 Wilson Loop functional(WLf)曾被广泛地用来研究规范场的非微扰量子化[1],近来在引力场量子化的研究中,这种方法也越发广泛地被使用[2]. 引力联络的 WLf 不仅可直接提供非微扰引力的量子态[3],也可用作表象变换,实现引力从联络表象到圈表象的变换[4]. 同时引力的量子 h 的微扰计算还可用于定域曲率激发的研究,为引力态的能量跃迁提供理论依据[5]. 目前在引力量子化上,由扩展的圈群给出的扩展的 h 开始用来构造引力扩展圈表象的波函数,这种方法得到的引力态可避免需要规整的问题[4].

本文首先通过扩展的圈群,得到一种扩展的 h,然后利用圈空间(L 空间)得到计算 h 的多重矢场的表式. 最后计算了一种 $R+F^2$ 引力的经典与量子 holonomy,发现该引力中存在曲率的量子激发.

2 扩展的 holonomy

令 V 为一实数,$V^{\mu_1\cdots\mu_n}(\forall\ n\neq 0,\mu_i\equiv a_i x_i, i=1,\cdots,n)$为一任意多重矢量密度,则不难证明多重张量密度

$$\boldsymbol{V}=(V,V^{\mu_1},\cdots,V^{\mu_1\cdots\mu_n},\cdots)\equiv(V,\boldsymbol{V})$$

的集合是个矢量空间 $\mathscr{D}_V$. 可用如下方法定义 $\mathscr{D}_V$ 的乘法:令 $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2\in\mathscr{D}_V$,则

$$\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2=(V_1V_2, V_1\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_1V_2+\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2),$$

1997-01-16收稿

式中 $V_1 \times V_2$由下式给出

$$(V_1 \times V_2)^{\mu_1 \cdots \mu_n} = \sum_{i=1}^{n-1} V_1^{\mu_1 \cdots \mu_i} V_2^{\mu_{i+1} \cdots \mu_n}.$$

上述乘法也可用如下方式给出

$$(V_1 \times V_2)^{\mu_1 \cdots \mu_n} = \sum_{i=0}^{n} V_1^{\mu_1 \cdots \mu_i} V_2^{\mu_{i+1} \cdots \mu_n},$$

式中令

$$V^{\mu_1 \cdots \mu_0} = V^{\mu_{n+1} \cdots \mu_n} = V.$$

$\mathcal{B}_V$中的单位元取为

$$\mathrm{I} = (1, 0, \cdots, 0, \cdots),$$

V的逆元规定为

$$V^{-1} = V^{-1}\mathrm{I} + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i V^{-i-1}(V - V\mathrm{I})^i,$$

可证明如上非零秩多重张量密度的集合$\mathcal{B}_V$将构成个群,即扩展的圈群,记为$\mathcal{B}_G$.

将时空流形 M做 3 + 1 维分解,其中的三维空间记以Σ. 在Σ上取多重张量密度

$$X = (1, X),$$

这里由 X给出的各多重矢量密度分量满足下面的代数约束(1)和微分约束(2):

$$\sum_{\mathrm{P}_k} X^{\mathrm{P}_k(\mu_1 \cdots \mu_n)} \equiv X^{\underline{\mu_1 \cdots \mu_k} \mu_{k+1} \cdots \mu_n} = X^{\mu_1 \cdots \mu_k} X^{\mu_{k+1} \cdots \mu_n}, \tag{1}$$

式中 P_k 为对连续 k个(广义) 指标$\mu_1 \cdots \mu_k$ 在所有指标中做双重保持指标次序的所有置换.

$$\partial_{\mu_i} X^{\mu_1 \cdots \mu_i \cdots \mu_n} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i^{\mu_i}} X^{\mu_1 \cdots \mu_i \cdots \mu_n} = [\delta(x_i - x_{i-1}) - \delta(x_i - x_{i+1})] X^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \cdots \mu_n}, \tag{2}$$

式中点 $x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \in \Sigma$. 可以证明所有 X的集合构成个群,它是$\mathcal{B}_G$的一个无限维子群,称为特殊扩展圈群,记为$\mathcal{B}_S$.

令 $X^{\mu_1 \cdots \mu_n} \equiv X^{\mu}$,则用多重张量密度 X^{μ}可构造一规范协变量

$$h_\Gamma(X) = \Gamma \cdot X = \Gamma_\mu X^\mu, \tag{3}$$

式中$\Gamma = (1, \Gamma_{\mu_1}, \cdots, \Gamma_{\mu_1 \cdots \mu_n, \cdots})$, $\Gamma_{\mu_1 \cdots \mu_n} = \Gamma_{\mu_1} \cdots \Gamma_{\mu_n}$, 且$\Gamma_{\mu_i} \equiv \Gamma_{a_i x_i} := \Gamma_{a_i}(x_i)$为$\Sigma$上的规范联络(这里对重复指标 i不求和), $a_i = 1, 2, 3$. (3)是Σ上扩展的 holonomy. 令

$$H_\Gamma(X) = \mathrm{Tr}\, h_\Gamma(X) = \mathrm{Tr}[\Gamma_\mu] X^\mu \tag{4}$$

做为推广的 WLf,则可得引力态的$\Gamma \to X$的表象变换

$$\Psi(X) = \int \mathrm{d}\mu [\Gamma]\, \Psi(\Gamma) H_\Gamma(X).$$

由于该变换的存在,可更明确和完备地提供Σ的微分同胚不变量做为引力的量子态.

3　圈群与 holonomy

将流形Σ中的圈(Loop)等价类构成的空间称为 L 空间[6],不难知道 L 空间在通常圈的

乘法下构成个群，记以$\textcircled{H}_{\mathrm{L}}$. 圈群$\textcircled{H}_{\mathrm{L}}$因只能用离散数表明群的性质，因而不看做李群. 可以证明$\textcircled{H}_{\mathrm{L}}$是李群$\textcircled{H}_{\mathrm{S}}$的一个子群，即$\textcircled{H}_{\mathrm{L}} \subset \textcircled{H}_{\mathrm{S}}$.

令 $l \subset \Sigma$ 为一在点 $x \in \Sigma$ 有自交的多重圈，其重数为 m，则 l 可记为

$$l_{xx} = l_{xx}^{m} = l_{xx}^{(1)} \circ l_{xx}^{(2)} \circ \cdots \circ l_{xx}^{(m)},$$

式中"∘"表示群$\textcircled{H}_{\mathrm{L}}$的乘法，下标双 x 表示从 x 出发返回 x. 基点在 x 的多个圈合成的圈记以

$$(l_{xx})_{p}^{p+q} = l_{xx}^{(p)} \circ \cdots \circ l_{xx}^{(p+q)},$$

p 表示该合成圈接在第 p 个圈之后. 若基点 k 在某圈，如 $l_{xx}^{(1)}$中，多重圈(其重数为 m)可记为

$$l_{k} = l_{k}^{(1)_{x}} \circ (l_{xx})_{2}^{m} \circ l_{x}^{(1)_{k}},$$

式中 $(l_{xx})_{m+1}^{m} = \mathrm{I}$(群$\textcircled{H}_{\mathrm{L}}$的单位元). l_k可为Σ上的多重矢量密度场提供解析实现. 例如，令

$$X^{\mu_1 \cdots \mu_i a x \mu_{i+1} \cdots \mu_l b x \mu_{l+1} \cdots \mu_n},$$

为Σ上的一多重矢量密度场，其中的指标 ax, bx为定域运算指标，把用 l_k所实现的这一矢场记为

$$X^{\mu_1 \cdots \mu_i a x \mu_{i+1} \cdots \mu_l b x \mu_{l+1} \cdots \mu_n}\{l_k\},$$

则有

$$\begin{aligned}
&X^{\mu_1 \cdots \mu_i a x \mu_{i+1} \cdots \mu_l b x \mu_{l+1} \cdots \mu_n}\{l_k\} = \\
&\sum_{s=1}^{m-1} \sum_{t=s+1}^{m} T_s^{ax} T_t^{bx} X^{\mu_1 \cdots \mu_i}\{l_k^{(1)_x} \circ (l_{xx})_2^s\} \cdot \\
&X^{\mu_{i+1} \cdots \mu_l}\{(l_{xx})_{s+1}^t\} X^{\mu_{l+1} \cdots \mu_n}\{(l_{xx})_{t+1}^m \circ l_x^{(1)_k}\} = \\
&\sum_{s=1}^{m-1} \sum_{t=s+1}^{m} T_s^{ax} T_t^{bx} X^{\mu}\{l_k^{(1)} \circ (l_{xx})_2^x (l_{xx})_{s+1}^t (l_{xx})_{t+1}^m \circ l_x^{(1)_k}\},
\end{aligned} \tag{5}$$

式中 m 为 l_k在点 x 的重数；$T_s^{ax} = T_s^a(x)$, $T_t^{bx} = T_t^b(x)$ 为点 x处的切矢量；且将 m 重点 x取在含基点 k 的圈 $l_k^{(1)}$之中.

若 $l \subset \Sigma$ 为单重圈，l可为多重矢场 $X^{\mu_1 \cdots \mu_n}$在其上给出一具体实现

$$X^{\mu_1 \cdots \mu_n}\{l\} = X^{a_1 \cdots a_n}(x_1 \cdots x_n, l) = \oint_l \mathrm{d}y_n^{a_n} \int_0^{y_n} \mathrm{d}y_{n-1}^{a_{n-1}} \cdots \int_0^{y_2} \mathrm{d}y_1^{a_1} \delta(x_n - y_n) \cdots \delta(x_1 - y_1). \tag{6}$$

在Σ的微分同胚群 Diff(Σ)的变换(保持 l 的基点不变)

$$x^a \to x'^a = D^a(x) \tag{7}$$

下，对于(6)中的多重矢场，有变换式

$$X^{a_1 x_1' \cdots a_n x_n'}\{Dl\} = J(x_1)^{-1} \cdots J(x_n)^{-1} \frac{\partial x_1'^{a_1}}{\partial x_1^{b_1}} \cdots \frac{\partial x_n'^{a_n}}{\partial x_n^{b_n}} X^{b_1 x_1 \cdots b_n x_n}\{l\}, \tag{8}$$

式中 J 为变换的 Jacobian. 利用多重矢场 $X^{\mu}\{l\}$，可构成类矢量 $X\{l\} \equiv (X^{\mu_1}\{l\}, \cdots, X^{\mu_1 \cdots \mu_i}\{l\}, \cdots)$, 在(7)的变换下，可得类矢量的变换式

$$X\{l\} \to X\{Dl\} = T_D X\{l\}, \tag{9}$$

式中 T_D为矩阵，其元素为

$$T_D{}^{\mu_1 \cdots \mu_n}{}_{\nu_1 \cdots \nu_m} = \delta_{m,n} T_D{}^{\mu_1}{}_{\nu_1} \cdots T_{D}{}^{\mu_n}{}_{\nu_n},$$

这里

$$T_{Dbx}^{ay} = J(x)^{-1}\frac{\partial D^a(x)}{\partial x^b}\ \delta(x - D^{-1}(y)) = \frac{\partial D^a(x)}{\partial x^b}\ \delta(D(x) - y).$$

与微分同胚的两个圈 (l, Dl) 相伴随的类矢量间的变换由(7)式给出，其中变换矩阵 T_D 为微分同胚群 Diff(Σ)提供一个与圈无关的无限维线性表示．利用(9)的记法，(8)可写成

$$X^{\mu_1\cdots\mu_n}\{Dl\} = \sum_{m=1}^{\infty} T_D^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_m} X^{\nu_1\cdots\nu_m}\{l\}.$$

对于一个圈而言，与其伴随的各个多重矢量场都为该圈提供了坐标．

利用(6)定义的多重矢场，可给出 Σ 上联络 Γ 的一个泛函

$$h_\Gamma(l) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\int \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \Gamma_{a_1}(x_1)\cdots\Gamma_{a_n}(x_n) X^{a_1\cdots a_n}(x_1\cdots x_n, l) =$$

$$\mathrm{P}\exp\left(\oint_l \mathrm{d}y^a\Gamma_a(y)\right), \tag{10}$$

式中 P 为规定相应积分次序的符号．(10)式即为 Σ 中的圈 l 的 holonomy．矩阵 $h_\Gamma(l)$ 为 Diff(Σ)和规范变换下的协变量．它与 l 有关，具有相同 h 的两个圈是等价的．$h_\Gamma(l)$规定了时空流形 M 中的矢量沿 Σ 中的圈 l 的平行移动．如令 $SU(2)$ 为 Σ 上联络 Γ 的规范群，则 $h_\Gamma(l)$是主丛 $P = P(\Sigma, SU(2))$结构群的一个元素，即 $h_\Gamma(l) \in SU(2)$．令

$$\mathrm{Tr}[h_\Gamma(l)] = \mathit{H}_\Gamma(l), \tag{11}$$

则 $H_\Gamma(l)$ 即为 l 上的 WLf．$H_\Gamma(l)$是规范变换不变量，也是 Σ 中的微分同胚变换不变量．因而可以用作引力的后选可观测量[7]．$H_\Gamma(l)$ 与 l 所属的 knot 类有关，可用来构成 Ashtekar 引力的微分同胚不变的态函数．h 的迹的计算与在 Σ 上选取的流形标架，或规范标架无关．$h_\Gamma(l)$ 给出了 H_L 到 H_S 中的一个表示．

4　holonomy 的计算

h 与 l 和 Γ 有关，本节需要算出具体的 h，以便进行下节的引力相互作用与 h 的关系的探讨．为此需引入时空度规的具体表式，现令点 $x \in M$ 的坐标为 $x^{(\mu)} = (t, r, \theta, \varphi)$，取 M 的线元为

$$\mathrm{d}S^2 = g_{00}(r)\mathrm{d}t^2 + g_{11}(r)\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi),$$

h 的定义与上节相同，这里需要考虑的指标为 (t, r, θ, φ)．对于 h 的迹，本节采用如下形式

$$\mathrm{Tr}[-I + h_\Gamma(l)] = -4 + \mathrm{Tr}[h_\Gamma(l)] = \omega(l), \tag{12}$$

式中单位矩阵 I 的引入是为了保证平坦空间的 h 的 Tr 为零，如此便有

$$\omega(l) = \omega^{(1)} + \frac{1}{2}\omega^{(2)} + \cdots,$$

式中

$$\omega^{(1)} = \mathrm{Tr}\oint_l \mathrm{d}x^\mu\Gamma_\mu(x),$$

$$\omega^{(2)} = \mathrm{TrP}\oint \mathrm{d}x_1^{\mu_1}\oint \mathrm{d}x_2^{\mu_2}\Gamma_{\mu_1}(x_1)\Gamma_{\mu_2}(x_2),$$

其余类推．由线元表式可得不为零的 Chirstoffel 联络分量有：

$$\Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \frac{1}{2g_{00}}\frac{\mathrm{d}g_{00}}{\mathrm{d}r},$$

$$\Gamma^r_{tt} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\mathrm{d}g_{00}}{\mathrm{d}r},\quad \Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\mathrm{d}g_{11}}{\mathrm{d}r},\quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{g_{11}},\quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{r\sin^2\theta}{g_{11}},$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r},\quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r},\quad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \cot\theta.$$

选积分圈 l 为

$$x^{(\mu)} = (t_0, r_0, \theta_0, \varphi),\ \varphi: 0\to 2\pi,$$

且 $\mathrm{d}t, \mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta = 0$，则有

$$\begin{aligned}\omega^{(1)} &= \oint_l \mathrm{d}x^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = \\ &\oint_l \mathrm{d}\varphi(\Gamma^t_{\mu t} + \Gamma^r_{\mu r} + \Gamma^\theta_{\mu\theta} + \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^{(2)} &= \mathrm{P}\oint \mathrm{d}x_1^{\mu_1}\oint \mathrm{d}x_2^{\mu_2}\Gamma^\alpha_{\mu_1\beta}\Gamma^\beta_{\mu_2\alpha} = \\ &2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^{\varphi'}\mathrm{d}\varphi''\{\Gamma^r_{\varphi'\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi''r} + \Gamma^\theta_{\varphi'\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi''\theta} + \Gamma^\varphi_{\varphi' r}\Gamma^r_{\varphi''\varphi} + \Gamma^\varphi_{\varphi'\theta}\Gamma^\theta_{\varphi''\varphi}\} = \\ &-2(2\pi)^2\left(\frac{\sin^2\theta_0}{g_{11}(r_0)} + \cos^2\theta_0\right),\end{aligned}$$

通项 $\omega^{(n)}$ 为

$$\begin{aligned}\omega^{(n)} &= \mathrm{P}\oint \mathrm{d}x_1^{\mu_1}\oint \mathrm{d}x_2^{\mu_2}\cdots\oint \mathrm{d}x_n^{\mu_n}\Gamma^\alpha_{\mu_1\alpha_1}\Gamma^{\alpha_1}_{\mu_2\alpha_2}\cdots\Gamma^\alpha_{\mu_n\alpha_{n-1}} = \\ &\begin{cases} 0, & n = 3, 5, 7, \cdots(n\text{ 为奇数}), \\ 2(2\pi)^n(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{\sin^2\theta_0}{g_{11}(r_0)} + \cos^2\theta_0\right)^{\frac{n}{2}}, & n = 4, 6, 8, \cdots(n\text{ 为偶数}),\end{cases}\end{aligned}$$

求得此类球对称引力场的精确的 $\omega(l)$ 为

$$\begin{aligned}\omega(l) &= \omega^{(1)} + \frac{1}{2}\omega^{(2)} + \frac{1}{3!}\omega^{(3)} + \cdots = \\ &\frac{1}{2}\omega^{(2)} + \frac{1}{4!}\omega^{(4)} + \frac{1}{6!}\omega^{(6)} + \cdots =\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\ \omega^{(2k)}=$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left[2\pi\sqrt{\frac{\sin^2\theta_0}{g_{11}(r_0)}+\cos^2\theta_0}\ \right]^{2k}=$$

$$-2+2\cos\left[2\pi\sqrt{\frac{\sin^2\theta_0}{g_{11}(r_0)}+\cos^2\theta_0}\ \right].$$

再以一种 R + F^{2}纯引力为例,有[8]

$$g_{11}(r)=\left(1-\frac{2k_m}{r}+\frac{\chi_m}{r^2}\right)^{-1},\quad g_{00}(r)=-\left(1-\frac{2k_m}{r}+\frac{\chi_m}{r^2}\right),$$

式中 k_m, χ_m均为常数,代入上式有

$$\omega(l)=-2+2\cos\left[2\pi\sqrt{1-\frac{2k_m}{r_0}\sin^2\theta_0+\frac{\chi_m}{r_0^2}\sin^2\theta_0}\ \right],$$

此$\omega(l)$是该种 R + F^{2}引力的 h 的迹的精确表式.

5　R + F^{2}纯引力的曲率量子激发

R + F^{2}引力的作用量为

$S=-\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,(ak^{-2}R+eR_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta})$, 式中 $k^2=32\pi G$, 度规的展式为

$$\tilde{g}^{\mu\nu}\equiv\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}+kh^{\mu\nu}.$$

上式中的$\eta^{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$为经典背景, $kh^{\mu\nu}(x)$是这背景上的量子扰动,它与引力子在真空中的传播有关[5].

将量子化的 holonomy 取为

$$\langle\omega\rangle_0=\langle\omega^{(1)}\rangle_0+\frac{1}{2}\langle\omega^{(2)}\rangle_0+\frac{1}{3!}\langle\omega^{(3)}\rangle_0+\cdots,$$

则 $\langle\omega^{(2)}\rangle_0$, $\langle\omega^{(3)}\rangle_0\cdots$分别与引力的自由传播子、3–顶角…等的贡献相关,由于联络是对称场,其真空量子平均必为零,故$\langle\omega^{(2)}\rangle_0$是这一系列$\langle\omega^{(i)}\rangle_0$中的最大量级,即$\hbar$级. 现就此种引力计算$\langle\omega^{(2)}\rangle$,它将由裸传播子给出,即

$$\langle\omega^{(2)}\rangle_0=\oint \mathrm{d}x^\mu\oint \mathrm{d}y^\nu\langle\Gamma^\beta_{\mu\alpha}(x)\Gamma^\alpha_{\nu\beta}(y)\rangle.$$

这里

$$\Gamma^\alpha_{\mu\beta}=\frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\beta}+\partial_\beta g_{\mu\lambda}-\partial_\lambda g_{\mu\beta})=$$

$$-\frac{1}{2}\left(\tilde{g}_{\mu\lambda}\partial_\beta\tilde{g}^{\alpha\lambda}+\tilde{g}_{\lambda\beta}\partial_\mu\tilde{g}^{\alpha\lambda}-\tilde{g}^{\alpha\lambda}\tilde{g}_{\mu\rho}\tilde{g}_{\beta\sigma}\partial_\lambda\tilde{g}^{\rho\sigma}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\delta^\alpha_\mu\tilde{g}_{\rho\sigma}\partial_\beta\tilde{g}^{\rho\sigma}-\frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta\tilde{g}_{\rho\sigma}\partial_\mu\tilde{g}^{\rho\sigma}+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\lambda}\tilde{g}_{\mu\beta}\tilde{g}_{\rho\sigma}\partial_\lambda\tilde{g}^{\rho\sigma}\right),$$

其最低阶贡献为

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} = -\frac{k}{2}\left(\partial_\beta h^{\alpha}_{\mu} + \partial_\mu h^{\alpha}_{\beta} - \partial^{\alpha} h_{\mu\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\mu}\partial_\beta h^{\lambda}_{\lambda} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}\partial_\mu h^{\lambda}_{\lambda} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\beta}\partial^{\alpha} h^{\lambda}_{\lambda}\right),$$

由此，量子 holonomy 的$\hbar$级贡献为：

$$\begin{aligned}\langle\omega^{(2)}\rangle_0 = &\oint \mathrm{d}x^{\mu}\oint \mathrm{d}y^{\nu}\,\langle\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}(x)\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}(y)\rangle_0 = \\ &\frac{k^2}{2}\oint \mathrm{d}x^{\mu}\oint \mathrm{d}y^{\nu}\Big\{-\frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\,\langle h_{\alpha\beta}(x)\,h^{\alpha\beta}(y)\rangle_0 - \partial^{\alpha}\partial^{\beta}\,\langle h_{\mu\alpha}(x)\,h_{\nu\beta}(y)\rangle_0 + \\ &\eta^{\alpha\beta}\Box\langle h_{\mu\alpha}(x)h_{\nu\beta}(y)\rangle_0 - \eta^{\alpha\beta}\Box\langle h_{\mu\nu}(x)\,h_{\alpha\beta}(y)\rangle_0 + \\ &\frac{\eta^{\alpha\beta}}{2}\partial_\mu\partial^{\lambda}\langle h_{\nu\lambda}(x)h_{\alpha\beta}(y)\rangle_0 + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\nu\partial^{\lambda}\,\langle h_{\mu\lambda}(x)\,h_{\alpha\beta}(y)\rangle_0 - \\ &\frac{\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}}{4}\partial_\mu\partial_\nu\langle h_{\alpha\beta}(x)h_{\rho\sigma}(y)\rangle_0 + \frac{\eta^{\alpha\beta}}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\Box\langle h_{\alpha\beta}(x)\,h_{\rho\sigma}(y)\rangle_0\Big\},\end{aligned}$$

式中 $\langle h_{\mu\nu}(x)\,h_{\alpha\beta}(y)\rangle_0$为引力子传播子．选用谐和规范条件：$\partial_\nu h^{\mu\nu}=0$，可求得 $R+F^2$引力的引力子传播子为：

$$\begin{aligned}\langle h_{\mu\nu}(x)\,h_{\alpha\beta}(y)\rangle_0 = -\frac{2\mathrm{i}}{a}\Big\{&\left(\eta_{\mu(\alpha}\eta_{\beta)\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)D(x) - \\ &\left(\eta_{\mu(\alpha}\eta_{\beta)\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)D_M(x)\Big\},\end{aligned}$$

式中，$D(x)=\dfrac{1}{4\pi^2 x^2}$ 为无质、无旋粒子的传播子，$D_M(x)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}}{p^2+M^2}$ 为质量为 M、自旋为零粒子的传播子．且 $M^2=\dfrac{a}{4ek^2}$，$x^2=\boldsymbol{x}^2-x^{0^2}$.

由此可最终求得：

$$\begin{aligned}\langle\omega^{(2)}\rangle_0 = \frac{\mathrm{i}k^2}{2a}\oint \mathrm{d}x^{\mu}\oint \mathrm{d}y^{\nu}\Big\{&\frac{7a}{8ek^2}D_M(x-y) - \frac{19}{2}\partial_\mu\partial_\nu D_M(x-y) + \\ &8\partial_\mu\partial_\nu\frac{1}{4\pi^2 x^2} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\delta^4(x-y)\Big\},\end{aligned}$$

上式中前二项出自曲率平方项 F^2的贡献，第三项来自曲率项 R 的贡献，最后一项两者均有贡献．

如上结果表明该种引力的 $\langle\omega^{(2)}\rangle_0$不为零，与 GR 不同[5]，存在着定域曲率的引力量子激发，从而可以用来解释引力相互作用的传递和引力子的能量跃迁．顺便指出，该种 R + F^2引力的量子化是可以通过 Stelle 重整化方法消去所有发散的．

参 考 文 献

[1] A. Bassetto, F. De Biasio, L. Griguolo. Phys. Rev. Lett., 1994, **72**: 3141

[2] H. A. Morales-Técotl, C. Rovelli. Nucl. Phys., 1995, **B451**: 325

[3] A. Ashtekar, Lectures on: Non-Pertubative Canonical Gravity. Lecture Notes Prepared in Collaboration With R. S. Tate. World Scientific, Singapore. 1991.
[4] C. D. Bartolo, R. Gambini, J. Griego *et al.*. Rev. Lett., 1994, **72**: 3638
[5] G. Modanese. Phys. Lett., 1992, **B288:** 69
[6] R. Gambini. Phys. Lett., 1991, **B255:** 180
[7] L. Smolin. Phys. Rev., 1994, **D49**: 4028
[8] Wei Mozhen, Shao Changgui, He Changbai. Intern. J. Theor. Phys. 1989, **28**: 1437

Holonomies of Gravitational Connection

Shao Changgui Chen Zhongqiu Ma Weichuan Chen Yihan Lin Shuyuan
(*Physics Department, Hubei University, Wuhan* 430062)

Abstract The extended loop group and the extended holonomy are constructed. The holonomy used in gravity, is obtained using the loop space. For a $R+F^2$ gravity we calculate a classical and a quantum holonomy. the excitation of localized curvature and its expression are obtained.

Key words extended Loop group, Loop space, curvature excitaion

Received 16 January 1996