

均匀聚焦系统和周期性聚焦系统中 束晕形成的模拟研究*

黄志斌 陈银宝

(中国原子能科学研究院 北京 102413)

摘要 首先采用束核-试验粒子模型,利用 Poincaré 截面法,讨论了均匀聚焦系统和周期性聚焦系统中,由强流带电粒子的自场效应所导致的非线性共振及混沌现象.然后按照自治理论,进一步对相空间中的初始粒子分布分别满足水袋型、抛物线型以及高斯型等相空间分布情况下进行了模拟计算,并得到了一系列结果诸如束晕强度、发射度增长随失配因子及调谐衰减变化等.

关键词 相空间分布 束晕强度 发射度增长

1 引言

在强流离子直线加速器的设计中,充分地了解破坏束流品质的空间电荷效应、发射度增长和束晕的形成是极其重要的.虽然国内外为研究空间电荷所导致的一些现象而付出了很多努力,但是仍存在一些尚未解决的难题,束晕的形成机制就是其中的难题之一.当前国际上对应用强流离子直线加速器生产氙和嬗变核废料的共同兴趣,使得近段时间内的注意力集中在束晕的形成机制上.因为这种类型的机器要求束流损失低,以避免放射性的超标所导致的损害.因而,束晕形成机制的研究得到迅速发展,通过大量的模拟计算,目前得到共识,认为单粒子运动与束核的等离子体振荡所引起的参数共振是束晕形成的主要原因.基于这一思想,为了详细描述束晕的形成过程,就有了一系列的理论和数值模拟计算.束核-试验粒子模型的应用是一个有效的研究方法,它首先由 Gluckstern 提出,并得到广大研究工作者的应用和进一步发展.在这一模型中,认为均匀分布的束核作低阶振荡,束核振荡作用于试验粒子的运动,并假定试验粒子不影响束核的分布.如文献 [1] 提出了一个“呼吸”模型, KV 分布束流由于失配而注入此模型下,会与单粒子的振荡发生共振作用;文献 [2] 模拟计算了单粒子在束核作用下的运动状况等等.采用均方根特性来研究束晕形成是另一常用的方法,如在均方根发射度不变的假设下,由聚焦孔道的周期

1997-10-16收稿

* 国家自然科学基金和核工业科学基金资助

性所导致的束流包络的不稳定性即所谓的结构共振^[3].

本工作的目的在于了解束晕产生的主要原因. 模拟计算结果表明束晕的形成主要是因束流失配引起的, 而对调谐衰减 (tune depression) 的依赖性不是很明显. 因为偏离静态分布的束流, 总是企图减少非线性能量, 而趋向静态分布束流, 在这个过程中, 就激发起束核中的等离子体振荡, 从而导致束核中的一部分粒子形成束晕. 对束晕形成的研究在均匀聚焦系统中, 是通过初始在束核外的试验粒子的观察. 在周期性聚焦系统中, 对失配束流包络和束核外的试验粒子进行了数值模拟. 应该指出的是在上述的讨论中发射度被认为是常数. 而束晕的形成通常伴有发射度增长, 在上述过程中, 如果束核保持均匀密度分布, 而不采用束核外的试验粒子, 就根本观察不到束晕现象. 为了能满足束晕形成过程的自洽性, 进一步对在均匀聚焦系统中, 相空间中的初始粒子分布分别为水袋型、抛物线型以及高斯型的分布下, 考虑了发射度变化, 进行了数值模拟, 考察了束晕的形成机制.

2 束核-试验粒子模型

2.1 均匀聚焦系统

束流水平方向的包络方程为^[4]:

$$\frac{d^2 R_x}{dz^2} + k_0^2 R_x - \frac{2K}{(R_x + R_y)} - \frac{(\varepsilon_{\text{rms}}^x)^2}{R_x^3} = 0, \quad (1)$$

式中 R_x 、 R_y 分别为水平方向和垂直方向上的束流包络, k_0 为没有空间电荷的聚焦常数, K 为广义导流系数, $\varepsilon_{\text{rms}}^x$ 为水平运动方向上的均方根发射度. 类似地, 在垂直方向上有相似的等式. 假设在水平方向和垂直方向上包络方程是对称的, 则有 $R_x = R_y = R_{xy}$, $\varepsilon_{\text{rms}}^x = \varepsilon_{\text{rms}}^y = \varepsilon$, 式(1)可改写成下式:

$$\frac{d^2 \rho}{d\tau^2} + \rho - \frac{K'}{2\rho} - \frac{1}{4\rho^3} = 0, \quad (2)$$

式中, $\tau = k_0 z$, $\rho = \sqrt{k_0 / 2\varepsilon} R_{xy}$, $K' = K / (k_0 \varepsilon)$, 令式(2)中 $d^2 \rho / d\tau^2 = 0$, 则可得匹配的均方根束流初始半径 ρ_0 为: $\rho_0^2 = (K' + \sqrt{K'^2 + 4}) / 4 = 1 / (2\eta)$, 调谐衰减 $\eta = k / k_0$, 其中 k 为具有空间电荷的聚焦常数, 参数 K' 与调谐衰减 η 有关系 $K' = (1 - \eta^2) / \eta$.

进一步引入无量纲量 $\hat{r} = r\sqrt{k_0} / \varepsilon$, $\hat{\theta} = \theta$, $\hat{p}_r = p_r / \sqrt{k_0 \varepsilon}$, $\hat{p}_\theta = p_\theta / \varepsilon$, 这里的 (r, θ) 表示极坐标, (p_r, p_θ) 表示相应的共轭动量, 独立变量仍为 $\tau = k_0 z$, 对于圆形束流, 则有 $\hat{p}_\theta = L = \text{const.}$

因此, 粒子的运动方程为:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \hat{r}}{d\tau^2} + \hat{r} - \frac{L^2}{\hat{r}^3} = \frac{K'}{R^2} \hat{r} & (\hat{r} \leq R) \\ \frac{d^2 \hat{r}}{d\tau^2} + \hat{r} - \frac{L^2}{\hat{r}^3} = \frac{K'}{\hat{r}} & (\hat{r} > R) \end{cases}, \quad (3)$$

式中, $R(\tau) = \sqrt{2} \rho(\tau)$.

当 $L = 0$ 时, 束核-试验粒子的共振特别明显^[1], 此时, 粒子的运动方程变为下式:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \frac{K'}{R^2} x & (|x| \leq R) \\ \frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \frac{K'}{x} & (|x| > R) \end{cases} \quad (4)$$

2.2 周期性聚焦系统

强流带电粒子的束流在周期性螺旋管聚焦磁场 $B(r, z)$ 中, 其水平方向的包络方程为:

$$\frac{d^2R_x}{dz^2} + \kappa_z(z)R_x - \frac{2K}{(R_x + R_y)} - \frac{(\varepsilon_{ms}^x)^2}{R_x^3} = 0, \quad (5)$$

式中, $z = \beta ct$ 为轴坐标, 其中 βc 为粒子沿轴向的平均速度,

$\kappa_z(z)$ 为周期函数即 $\kappa_z(z) = \kappa_z(z + S) = q^2 B_z^2(z) / 4\gamma^2 \beta^2 m^2 c^4$

表明聚焦场的强度, 其中, $B_z(z) = B_z(0, z)$ 是在 z 轴上的磁

场强度, S 为聚焦场的周期长度, q 和 m 分别为粒子的电量

和静止质量, 式中 $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, 图 1 表示周期性聚焦场 $\kappa_z(z)$ 的剖面图, 真空相移 σ_0 近似地满足下式: $\sigma_0 = \left[S \int_0^S \kappa_z(z) dz \right]^{1/2} = [nS^2 \kappa_z(0)]^{1/2}$.

假设在水平和垂直方向上的包络方程是对称的, 则式 (5) 变为下式:

$$\frac{d^2R_{xy}}{dz^2} + \kappa(z)R_{xy} - \frac{K}{R_{xy}} - \frac{\varepsilon^2}{R_{xy}^3} = 0, \quad (6)$$

同时引入无量纲量 $s = z / S$, $R = R_{xy} / \sqrt{\varepsilon S}$, $\kappa(s) = S^2 \kappa_z(z)$, $\hat{K} = SK / \varepsilon$, 则式 (6) 变为下式:

$$\frac{d^2R}{ds^2} + \kappa(s)R - \frac{\hat{K}}{R} - \frac{1}{R^3} = 0, \quad (7)$$

式中: $\hat{K} = \sigma_0^2(1 - \eta^2) / \eta$ 依赖于调谐衰减 η 和真空相移 $\sigma_0 = \left[\int_0^1 \kappa(s) ds \right]^{1/2} = [n\kappa(0)]^{1/2}$.

利用光滑近似法可得到束流匹配半径为^[5]:

$$R_0 = \left\{ \frac{\hat{K}}{2\sigma_0^2} + \left[\frac{1}{\sigma_0^2} + \left(\frac{\hat{K}}{2\sigma_0^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (8)$$

粒子的相应坐标变为 $|x| = r / \sqrt{\varepsilon S}$, $\hat{\theta} = \theta$, $\hat{p}_r = p_r / \sqrt{\varepsilon / S}$, $\hat{p}_\theta = p_\theta / \varepsilon$, 且有 $\hat{p}_\theta = L = \text{const.}$ 当 $L = 0$ 时, 粒子的运动方程为:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \frac{\hat{K}}{R^2} x & (|x| \leq R) \\ \frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \frac{\hat{K}}{x} & (|x| > R) \end{cases} \quad (9)$$

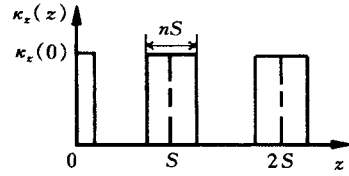


图 1 周期性聚焦场 $\kappa_z(z)$ 的剖面图

2.3 数值结果及分析

2.3.1 均匀聚焦系统

给定初始条件 $\rho(\tau=0) = \mu\rho_0$ 和 $d\rho/d\tau(\tau=0) = 0$, 其中失配因子 μ 被定义为初始束流半径与束流的匹配半径之比, 首先对式(2)进行数值计算, 并将其结果代入式(4)中, 来考察试验粒子随自变量 τ 的变化. 同时, 采用包含束核外的粒子, 以便观察这些粒子因共振而产生的效应. 采用 Poincaré 截面法^[6], 得到的粒子相轨迹 Poincaré 截面图如图 2 所示.

由图 2 可知, 随着束流的严重失配, 在束核附近的 KAM 曲线被破坏, 出现共振岛, 且随着空间电荷的非线性效应的增强, 使得这种共振进一步导致在束核附近出现混沌现象.

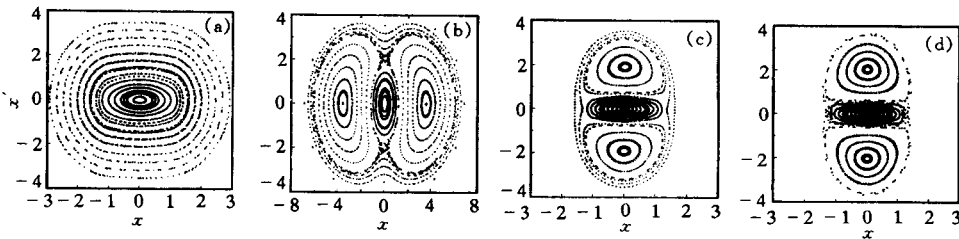


图 2 粒子相轨迹 Poincaré 截面图

(a) $\mu=1.0, \eta=0.5$; (b) $\mu=0.5, \eta=0.5$; (c) $\mu=1.5, \eta=0.5$; (d) $\mu=1.5, \eta=0.4$.

2.3.2 周期性聚焦系统

对于满足如图 1 所示的周期性聚焦磁场, 分别对式(9)和(11)进行数值模拟计算, 得

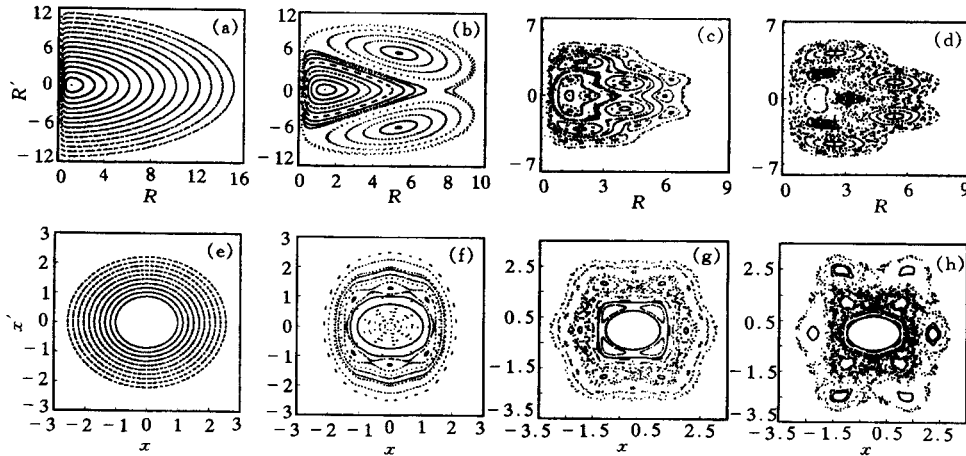


图 3 失配束流包络相轨迹的 Poincaré 截面图(a—d)和试验粒子对应于匹配束流的相轨迹的 Poincaré 截面图(e—h)

(a)和(e)对应于 $\hat{K}=0, \sigma_0=45.5^\circ$; (b)和(f)对应于 $\hat{K}=3, \sigma_0=85^\circ$; (c)和(g)对应于 $\hat{K}=3, \sigma_0=115^\circ$; (d)和(h)对应于 $\hat{K}=5, \sigma_0=115^\circ$.

到失配束流包络相轨迹的 Poincaré 截面图如图 3(a—d) 所示; 试验粒子对应于匹配束流的相轨迹的 Poincaré 截面图如图 3(e—h) 所示.

由图 3(a—d) 可知, 随着真空相移 σ_0 增大, 包络相轨迹运动变得更加复杂, 对于真空相移 $\sigma_0 > 90^\circ$ 和足够大的 \hat{K} , 将导致束流包络振荡趋向混沌行为; 同样, 由图 3(e—h), 束核外粒子相轨迹的 Poincaré 截面图表明随 σ_0 的增大, 结构变得复杂, 当 $\sigma_0 > 90^\circ$ 时, 随着 \hat{K} 的增大, 在束核附近的混沌现象更加明显.

3 多粒子数值模拟

3.1 数值模拟方法

为了满足束晕形成过程的自洽性即伴有发射度增长, 在计算过程中必须考虑对发射度的计算.

在均匀聚焦孔道中, 由于圆形束流的对称性, 哈密顿系统是独立于方位角坐标 θ 的, 方位角方向的运动是以 $p_\theta = L$ 为常角动量的简单的旋转运动, 因而可以不考虑该方向上的动力学过程, 仅考虑径向运动, 其运动方程如下^[7]:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + r - \frac{L^2}{r^3} = \frac{K' \xi(r; \tau)}{r}, \quad (10)$$

式中 $\xi(r; \tau) = Q(r; \tau) / Nq$, 其中 $Q(r; \tau)$ 表示包含在 r 范围内的粒子所具有的总电量, 其定义为 $Q(r; \tau) = q \int_0^r dr \int_{-\infty}^{+\infty} dp_r f(r, p_r; \tau)$, $f(r, p_r; \tau)$ 是相空间 (r, p_r) 中的分布函数, N 为总的粒子数. 因为随着 τ 的变化, 分布函数也随之变化, 因而要对 $\xi(r; \tau)$ 进行重新修正.

式 (10) 仅依赖于两个自由参数即调谐衰减 η 和失配因子 μ , 而依赖于粒子的常数 $L = xP_y - yP_x$ 则是由粒子的分布函数所确定.

为了方便, 引入等离子体波长 λ_p ^[5]

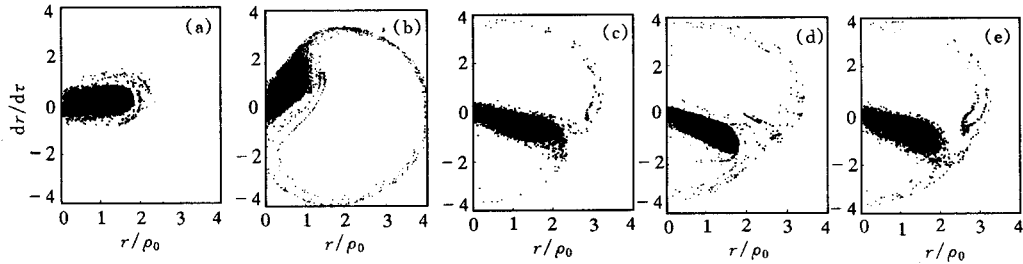
$$\lambda_p = \frac{\sqrt{2} \pi}{k_0 \sqrt{1 - \eta^2}}, \quad (11)$$

对于自变量 $\tau = k_0 z$, 则 $\tau_p = k_0 \lambda_p$ 仅依赖于调谐衰减 η .

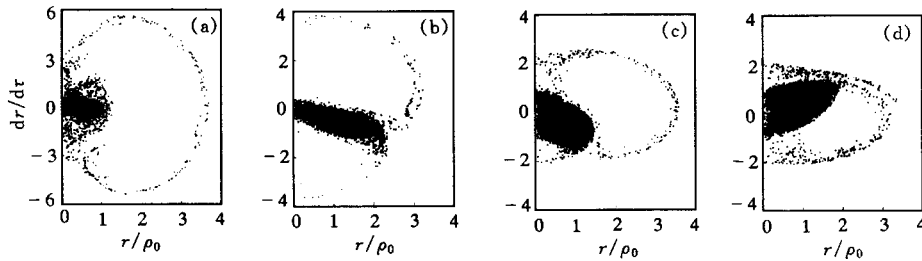
越接近于真实的束流分布能更好地满足束晕形成的自洽性, 因而, 采用 $N = 10000$ 个粒子满足在相空间 (r, p_r) 中的分布函数 $f(r, p_r; \tau)$ 分别为水袋型、抛物线型和高斯型的初始分布, 并在计算过程中对每个粒子的能量进行跟踪, 使粒子在传输过程中保持能量守恒.

3.2 束流稳定性的讨论

1) 对失配的束流进行数值计算, 设调谐衰减 η 为 0.3, 分布函数为高斯型分布分别对应于失配因子 μ 为 1.1, 1.5 和 1.3, 在 $\tau / \tau_p = 20$ 处粒子在相空间分布如图 4(a, b, c) 所示; 在调谐衰减 η 为 0.3 时, 分布函数分别为水袋型和抛物线型, 对应于失配因子 $\mu = 1.3$ 时, 在 $\tau / \tau_p = 20$ 处的相空间分布如图 4(d, e) 所示. 由图 4 可知, 随着失配因子 μ 的增大, 束

图 4 在 $\tau / \tau_p = 20$ 处粒子的相空间分布

(a—c)为初始高斯型的相空间分布分别对应于 $\mu = 1.0, 1.5, 1.3$; (d)和(e)分别为初始水袋型和抛物线型的相空间分布对应于 $\mu = 1.3, \eta = 0.3$.

图 5 初始高斯型的相空间分布在 $\tau / \tau_p = 20$ 处粒子的相空间分布

(a) $\mu = 1.3, \eta = 0.1$; (b) $\mu = 1.3, \eta = 0.3$; (c) $\mu = 1.3, \eta = 0.6$; (d) $\mu = 1.3, \eta = 0.9$.

晕粒子的最大幅度有明显的增长。

2) 初始高斯型分布函数对于相同的失配因子 μ 为 1.3, 调谐衰减 η 分别为 0.1, 0.3, 0.6, 0.9 的情况下进行了数值计算, 其结果分别为图 5(a, b, c, d)所示. 由图可知, 束晕粒子的最大幅度没有明显的增长, 只是在 p_r 方向上增大, 这将导致发射度增长。

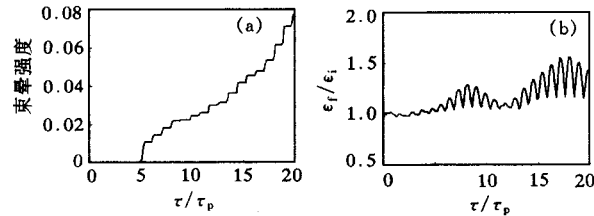


图 6 束晕强度和发射度增长在均匀聚焦孔道中的变化曲线

3) 束晕强度被定义为在相空间 (r, p_r) 中 $r > 1.75a$ 的粒子数与总的粒子数之比^[8], 其中 a 为束流的匹配半径. 本文中的束晕强度被定义为在相空间 (r, p_r) 中 $r > 1.2\mu a$ 的粒子数与总的粒子数之比. 计算了束晕强度在均匀聚焦孔道中的变化, 如图 6(a)所示; 随自变量 τ 的变化, 束晕强度越来越大. 图 6(b)描述了在均匀聚焦孔道中发射度的变化情况.

4) 在随自变量增长过程中, 采用刮割器刮掉束晕粒子的结果如图 7 所示. 对相空间中的初始高斯型分布函数进行了数值模拟计算. 图 7 中 (a) 对应于初始高斯型分布, 经过 $\tau / \tau_p = 20$ 传输后得到 (b), 如果采用刮割器 $r = 1.2\mu a$, 超过 r 的粒子被定为束晕粒子, 刮掉束晕粒子后得到束核粒子, (c) 为初始束晕粒子的相空间分布, (d) 为在 $\tau / \tau_p = 20$ 处束

晕粒子的相空间分布, (e) 为初始束核粒子的相空间分布, (f) 为初始束核粒子经过 $\tau / \tau_p = 20$ 传输后的相空间分布, (f) 经过连续刮割束晕粒子一个等离子波长后成为 (g), 然后 (g) 传输到 $\tau / \tau_p = 30$ 处的相空间分布为 (h), (h) 再传输到 $\tau / \tau_p = 40$ 处的相空间分布为

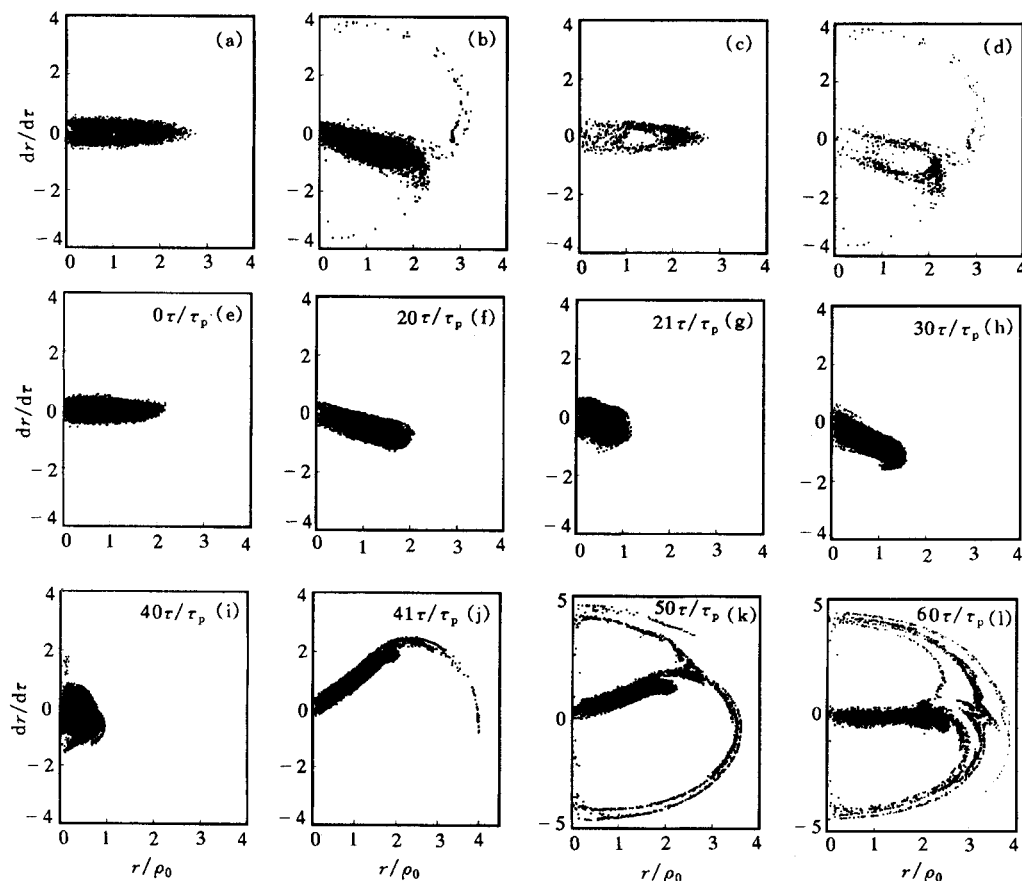


图 7 初始高斯型的相空间分布随 τ / τ_p 的变化

其中从 (f) — (g) 放置有刮割器, $\mu = 1.3, \eta = 0.3$.

(i), (i) 又经过一个等离子波长后成为 (j), (j) 传输到 $\tau / \tau_p = 50$ 处的相空间分布为 (k), (k) 再传输到 $\tau / \tau_p = 60$ 处的相空间分布为 (l). 图 7(j—l) 表明经过刮割器刮割后, 束晕还会再生. 并且由图 7(c) 和 (d) 可知, 束晕粒子大部分来源于束核外粒子和少量的束核粒子.

4 结束语

在聚焦系统中, 偏离静态分布的束流在传输过程中总是企图减小非线性场能而转化为静态分布; 在此过程中, 束核的等离子振荡所激发的参数共振将使束核中部分粒子形成束晕. 采用束核—试验粒子模型, 认识到在失配束流中, 束核是相对稳定的, 而束核外粒子则会形成束晕. 通过采用更趋向真实的束流分布, 进行了数值模拟计算, 进一步明确了束

晕粒子的来源.

参 考 文 献

- [1] Gluckstern Robert L. Phys. Rev. Lett., 1994, 73(9):1247—1250
- [2] O'Connel J S, Wangler T P, Mill R S et al. Proc. 1993 Particle Accelerator Conf. Washington D C, 1993. 3657—3659
- [3] Chen C, Davidson R C. Phys. Rev. Lett., 1994, 72(14):2195—2198
- [4] Kapchinskij I M, Vladimirsij V V. in Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators. CERN, Geneva, 1959
- [5] Reiser M. Theory and Design of Charged Particle Beams. John Wiley & Sons, Inc, 1994. 224—227
- [6] Lagniel M. Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., 1994, A345(3):405—410
- [7] Okamoto H, Ikegami M. Phys. Rev., 1997, E55(4):4694—4705
- [8] Gluckstern Robert L, Cheng W-H, Kurennoj S S et al. Phys. Rev., 1996, E54(6):6788—6797

Simulation of Halo Formation in Breathing Round Beams in a Uniform or Periodic Focusing Channel*

Huang Zhibin Chen Yinbao

(China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413)

Abstract It is shown that beam self-field effects induce nonlinear resonances and chaotic behavior in uniform or periodic focusing channel by means of particle-core model and Poincaré mapping technique. In order to explore self-consistently the fundamental properties of breathing round beams propagating in a uniform channel, the initial phase-space distribution of a beam injected into a linac is adopted to be a sufficiently realistic distribution such as Gaussian, waterbag and parabolic distribution. Multiparticle simulations are performed and a series of results such as halo intensity and emittance growth are obtained.

Key words phase-space distribution, halo intensity, emittance growth

Received 16 October 1997

* Supported by the National Natural Science Foundation of China and the Science Fundation of Chinese Nuclear Industry