第24卷 第1期
2000 年1月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.24, No.1
Jan., 2000

15 顶角模型反射方程的常数解

石康杰　李广良　范　桁　侯伯宇

(西北大学现代物理所　西安　710069)

摘要　得到了15顶角模型 $A_2^{(1)}$ 模型和超对称 t-J模型反射方程的非对角解．结果发现，$A_2^{(1)}$ 模型具有三种形式的非对角解，超对称 t-J模型具有一种形式的非对角解，每种形式的非对角解均含有两个解，每个非对角解中均含有三个任意参数．关于对角解也得到了一些新的形式的解．

关键词　$A_2^{(1)}$ 模型　超对称 t-J模型　反射方程　非对角解

1　引言

二维完全可解晶格模型中的开边界条件问题是人们颇感兴趣的一件事情．自 Sklyanin 提出反射方程[1]以来，人们在反射方程的解这方面已做了不少的工作[1—10]．

$A_2^{(1)}$ 模型和超对称 t-J 模型分别是超对称 $SU_q(m/n)$ 模型[11] $m=3, n=0$ 和 $m=2$，$n=1$ 时的情形．$A_{n-1}^{(1)}$ 顶角模型以及超对称 t-J模型反射方程的对角解已分别被 de Vega 和 Gonzalez-Ruiz[3] 以及 Gonzalez-Ruiz[4] 获得，Fu 和 Ge[5] 用 Yang-Baxterization方法给出了 $A_2^{(1)}$ 模型反射方程的一个非对角解，而有关 $A_2^{(1)}$ 模型和超对称 t-J模型的一般非对角解却未曾见到报道．

本文通过直接解反射方程，得到 $A_2^{(1)}$ 模型的三种形式非对角解和超对称 t-J模型的一种形式的非对角解，并给出了这两个模型的所有形式的对角解．

2　反射方程

对于 $N\times N$ 正方晶格，n 态可解顶角模型的 R 矩阵一般满足 Yang-Baxter 方程[12,13]

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v)=R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u), \tag{1}$$

其 R 矩阵作用在 $C^n\otimes C^n$ 空间上，$R_{12}(u)$，$R_{13}(u)$，$R_{23}(u)$ 均作用在 $C^n\otimes C^n\otimes C^n$ 空间上，$R_{12}(u)=R(u)\otimes I, R_{23}(u)=I\otimes R(u)$ 等等．R 矩阵还满足如下性质

规则性：$R_{12}(0)=\rho(0)^{\frac{1}{2}}P_{12}$，

1998-11-09收稿

PT 对称性：$P_{12}R_{12}(u)P_{12} = R_{12}^{t_1 t_2}(u)$,

幺正性：$R_{12}(u)R_{12}^{t_1 t_2}(-u) = \rho(u)$, (2)

弱交叉幺正性：$(((R_{12}^{t_2}(u))^{-1})^{t_2})^{-1} = f(u)\overset{2}{M}R_{12}(u+2\eta)\overset{2}{M}^{-}$ 其中$\rho(u)$为一偶标度函数，P为置换算子，$P(x\otimes y) = y\otimes x$，$t_i$表示第$i$空间的转置，$\eta$为交叉参数，$M$为交叉矩阵，$\overset{1}{M} = M\otimes I$，$\overset{2}{M} = I\otimes M$，$f(u)$为一待定函数，则由$R$矩阵和满足反射方程的$K$矩阵和$\tilde{K}$矩阵所定义的 transfer 矩阵构成一个对易族[1]．K和$\tilde{K}$矩阵所满足的反射方程为[1,2]

$$
\begin{aligned}
&R_{12}(u-v)\overset{1}{K}(u)R_{12}^{t_1 t_2}(u+v)\overset{2}{K}(v) = \\
&\qquad \overset{2}{K}(v)R_{12}(u+v)\overset{1}{K}(u)R_{12}^{t_1 t_2}(u-v),
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{12}(-u+v)\overset{1}{\tilde{K}}{}^{t_1}(u)\overset{1}{M}{}^{-1}R_{12}^{t_1 t_2}(-u-v-2\eta)\overset{1}{M}\overset{2}{\tilde{K}}{}^{t_2}(v) = \\
&\qquad \overset{2}{\tilde{K}}{}^{t_2}(v)\overset{1}{M}R_{12}(-u-v-2\eta)\overset{1}{M}{}^{-1}\overset{1}{\tilde{K}}{}^{t_1}(u)R_{12}^{t_1 t_2}(-u+v),
\end{aligned} \tag{4}
$$

这里$\overset{1}{K}(u) = K(u)\otimes I$，$\overset{2}{K}(u) = I\otimes K(u)$等等．对于任一满足(3)式的$K(u)$，称其为反射方程(3)的一个解．同样定义$\tilde{K}(u)$为反射方程(4)的一个解．不难发现，若$K(u)$是反射方程(3)的一个解，则

$$
\tilde{K}(u) = K(-u-\eta)^t M, \tag{5}
$$

为反射方程(4)的一个解．

3 $A_2^{(1)}$模型反射方程的解

$A_2^{(1)}$模型的R矩阵为[14]

$$
R(u) = \begin{pmatrix}
a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\
0 & d & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & c & 0 \\
0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & b & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a
\end{pmatrix}, \tag{6}
$$

其中$R_{11}^{11}(u) = R_{22}^{22}(u) = R_{33}^{33}(u) = a(u) = \sinh(u+q)$，$R_{12}^{12}(u) = R_{13}^{13}(u) = R_{21}^{21}(u) = R_{23}^{23}(u) = R_{31}^{31}(u) = R_{32}^{32}(u) = b(u) = \sinh(u)$，$R_{12}^{21}(u) = R_{13}^{31}(u) = R_{23}^{32}(u) = c(u) = e^{u}\sinh(q)$，$R_{21}^{12}(u) = R_{31}^{13}(u) = R_{32}^{23}(u) = d(u) = e^{-u}\sinh(q)$．$R(u)$满足规则性，幺正性，PT 对称性和弱交叉幺正性，其中的$\rho(u) = \sinh(q+u)\sinh(q-u)$，$\eta = \frac{3}{2}q$，$M = \mathrm{diag}(e^{2q}, 1, e^{-2q})$，$f(u) =$

$\dfrac{\sinh(u)\sinh(u+3q)}{\sinh(u+2q)\sinh(u+4q)}$. 现在来求反射方程(3)的解 $K(u)$.

设 $A_2^{(1)}$模型反射方程的解 $K(u)$为

$$K(u) = \rho^K(u)\begin{pmatrix} x_1(u) & y_{11}(u) & z_1(u) \\ y_{21}(u) & x_2(u) & y_{12}(u) \\ z_2(u) & y_{22}(u) & x_3(u) \end{pmatrix},$$

式中$\rho^K(u)$为任意函数($\rho^K(u) \not\equiv 0$).

$X_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = \overline{X}_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$ 所产生的方程，其中 $i = 3(i_1$

(3)式，由 Eq[1,6]

$$y_{11}(u)z_1(v)[\sinh(q+u-v) - \sinh(u-v)] = e^{u-v}\sinh(q)y_{11}(v)z_1(u)$$

和 Eq[1,8]

$$y_{11}(v)z_1(u)[\sinh(q+u-v) - \sinh(u-v)] = e^{-u+v}\sinh(q)y_{11}(u)z_1(v)$$

得:
$$y_{11}(u)z_1(v) = 0, \tag{8}$$

(这里不考虑 $\sinh(q) = 0$ 的情况). 同样，由 Eq[2,9]和 Eq[4,9]得

$$y_{12}(u)z_1(v) = 0, \tag{9}$$

由 Eq[3,5]和 Eq[7,5] 得: $$y_{11}(u)y_{22}(v) = 0, \tag{10}$$

由 Eq[5,3]和 Eq[5,7]得: $$y_{12}(u)y_{21}(v) = 0, \tag{11}$$

由 Eq[9,2]和 Eq[9,4]得: $$y_{22}(u)z_2(v) = 0, \tag{12}$$

由 Eq[6,1]和 Eq[8,1]得: $$y_{21}(u)z_2(v) = 0, \tag{13}$$

Eq[2,9], Eq[4,9], Eq[3,5], Eq[7,5], Eq[5,3], Eq[5,7], Eq[6,1], Eq[8,1], Eq[9,2]和 Eq[9,4]见附录. 如 $y_{11}(u)$, $y_{12}(u)$, $z_1(u)$, $z_2(u)$, $y_{21}(u)$, $y_{22}(u)$全为零，则 $K(u)$只为对角形式. 现在只考虑 $K(u)$不为对角形式的情况，则上述的六个非对角元素中至少有一个不为零，(A)：假设 $y_{11}(u) \neq 0$，则由(8)式和(10)式得

$$z_1(u) = 0,\ y_{22}(u) = 0. \tag{14}$$

而由(13)式和(11)式可知，若 $y_{21}(u) \neq 0$，则必有

$$z_2(u) = 0,\ y_{12}(u) = 0. \tag{15}$$

若 $y_{21}(u) = 0$，则由 Eq[1,7]和 Eq[9,6] 分别得到 $y_{12}(u) = 0$ 和 $z_2(u) = 0$，因此对于 $y_{11}(u) \neq 0$ 的情况，不管 $y_{21}(u) = 0$ 或 $y_{21}(u) \neq 0$，都必有 $z_1(u) = z_2(u) = y_{12}(u) = y_{22}(u) = 0$. (B)：假设 $y_{21} \neq 0$，则由(11)和(13)式得 $z_2(u) = y_{12}(u) = 0$. 而由(8)和(10)式知，若 $y_{11}(u) \neq 0$，则必有 $z_1(u) = y_{22}(u) = 0$，若 $y_{11}(u) = 0$，则由 Eq[7,1]和 Eq[6,9]分别得到 $y_{22}(u) = 0$ 和 $z_1(u) = 0$，因此对于 $y_{21} \neq 0$ 的情况，不管 $y_{11}(u)$是否为零，都必有 $z_1(u) = z_2(u) = y_{12}(u) = y_{22}(u) = 0$. 综合上述分析结果，可知 $K(u)$存在下面一种形式(Eq[1,7], Eq[9,6], Eq[7,1]和 Eq[6,9]见附录)

$$K(u) = \rho^K(u)\begin{pmatrix} x_1(u) & y_{11}(u) & 0 \\ y_{21}(u) & x_2(u) & 0 \\ 0 & 0 & x_3(u) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

还可分析(C) $z_1(u)\neq 0$ 和(D) $z_2(u)\neq 0$ 的情况以及(E) $y_{12}(u)\neq 0$ 和(F) $y_{22}(u)\neq 0$ 的情况，从而知道 $K(u)$ 还存在以下两种形式

$$K(u)=\rho^K(u)\begin{pmatrix} x_1(u) & 0 & z_1(u)\\ 0 & x_2(u) & 0\\ z_2(u) & 0 & x_1(u)\end{pmatrix} \tag{17}$$

和

$$K(u)=\rho^K(u)\begin{pmatrix} x_1(u) & 0 & 0\\ 0 & x_2(u) & y_{12}(u)\\ 0 & y_{22}(u) & x_3(u)\end{pmatrix}. \tag{18}$$

先考虑第一种形式(16)，把(16)式代回(3)式，由 Eq[2,4]得

$$\begin{aligned}&e^{-u+v}\sinh(u+v)x_1(u)x_2(v)+e^{u+v}\sinh(u-v)x_2(u)x_2(v)=\\&e^{-u-v}\sinh(u-v)x_1(v)x_1(u)+e^{u-v}\sinh(u+v)x_1(v)x_2(u),\end{aligned} \tag{19}$$

将方程(19)两边同除 $x_2(u)x_2(v)$，对 v 求导并令 $v=0$，得

$$\frac{x_1(u)}{x_2(u)}=\frac{e^{u}\sinh(\zeta-u)}{e^{-u}\sinh(\zeta+u)}, \tag{20}$$

这里 ζ 为任意参数. $x_1(u)$，$x_2(u)$ 又可写成

$$\begin{aligned}x_1(u)&=e^{u}\sinh(\zeta-u)g(u),\\x_2(u)&=e^{-u}\sinh(\zeta+u)g(u),\end{aligned} \tag{21}$$

$g(u)$ 为任意不恒为零的函数. 把(21)式代入 Eq[7,8]

$$y_{11}(u)(x_1(v)-x_2(v))=y_{11}(v)(x_1(u)-x_2(u)), \tag{22}$$

得

$$\frac{y_{11}(u)}{y_{11}(v)}=\frac{\sinh(2u)g(u)}{\sinh(2v)g(v)}, \tag{23}$$

$y_{11}(u)$ 又可写为

$$y_{11}(u)=c_1\sinh(2u)g(u), \tag{24}$$

式中 c_1 为任意参数. 将(21)式代入 Eq[8,7]，同样可得

$$y_{21}(u)=c_2\sinh(2u)g(u), \tag{25}$$

式中 c_2 为任意参数. 将(21)，(24)和(25)再代入 Eq[3,8]

$$\begin{aligned}&y_{11}(u)[e^{-u+v}\sinh(u+v)x_3(v)-e^{-u-v}\sinh(u-v)x_2(v)]=\\&y_{11}(v)[e^{-u-v}\sinh(u-v)x_1(u)+e^{u-v}\sinh(u+v)x_3(u)],\end{aligned} \tag{26}$$

后对 v 求导并令 $v=0$,得

$$x_3(u)=x_2(u)+ce^{-2u}\sinh(2u)g(u), \tag{27}$$

其中 c 为任意参数. 再将(21),(24),(25)和(27)式代入 Eq[3,7]

$$\begin{aligned}&e^{-u+v}\sinh(u+v)x_1(u)x_3(v)+e^{u+v}\sinh(u-v)x_3(u)x_3(v)=\\&e^{-u-v}\sinh(u-v)x_1(u)x_1(v)+e^{u-v}\sinh(u+v)x_1(v)x_3(u)+\\&e^{-u-v}\sinh(u-v)y_{11}(u)y_{21}(v),\end{aligned} \tag{28}$$

发现,c_1,c_2和 c 必须满足关系: $c^2-c_1c_2=-e^{\zeta}c.$ (29)

至此,得到 $K(u)$的第一种形式的解(16)

$$K(u)=\rho'(u)\begin{pmatrix}e^{u}\sinh(\zeta-u) & c_1\sinh(2u) & 0\\ c_2\sinh(2u) & e^{-u}\sinh(\zeta+u) & 0\\ 0 & 0 & e^{-u}\sinh(\zeta+u)+ce^{-2u}\sinh(2u)\end{pmatrix}, \tag{30}$$

$\rho'(u)=\rho^{K}(u)g(u)$. 经过验证,(30)式是满足反射方程(3)的. 现在来考虑 $K(u)$的第二种形式(17). 把(17)式代入(3)式,由 Eq[3,7]得

$$\begin{aligned}&e^{-u+v}\sinh(u+v)x_1(u)x_3(v)+e^{u+v}\sinh(u-v)x_3(u)x_3(v)=\\&e^{-u-v}\sinh(u-v)x_1(u)x_1(v)+e^{u-v}\sinh(u+v)x_1(v)x_3(u).\end{aligned} \tag{31}$$

将(31)式两端同除 $x_3(u)x_3(v)$,对 v 求导并令 $v=0$,可得

$$\begin{aligned}x_1(u)&=e^{u}\sinh(\zeta-u)g(u),\\x_2(u)&=e^{-u}\sinh(\zeta+u)g(u),\end{aligned} \tag{32}$$

ζ为任意参数,$g(u)$为不恒为零的任意函数. 将(32)式代入 Eq[4,6]

$$z_1(u)[e^{-2v}x_1(v)-e^{2v}x_3(v)]=z_1(v)[e^{-2u}x_1(u)-e^{2u}x_3(u)], \tag{33}$$

得

$$z_1(u)=c_1\sinh(2u)g(u), \tag{34}$$

c_1为任意参数. 将(32)式代入 Eq[6,4],同样可得

$$z_2(u)=c_2\sinh(2u)g(u), \tag{35}$$

c_2为任意参数. 将(32),(34)和(35)式代入 Eq[2,6]

$$\begin{aligned}&z_1(u)[e^{u-v}\sinh(u+v)x_2(v)-e^{u+v}\sinh(u-v)x_3(v)]=\\&z_2(v)[e^{-u-v}\sinh(u-v)x_1(u)+e^{u-v}\sinh(u+v)x_2(u)],\end{aligned} \tag{36}$$

后对 v 求导并令 $v=0$ 得

$$x_2(u)=x_1(u)+c\sinh(2u)g(u). \tag{37}$$

再将(32),(34),(35)和(37)式代入 Eq[2,4]

$$\begin{aligned}&e^{-u+v}\sinh(u+v)x_1(u)x_2(v)+e^{u+v}\sinh(u-v)x_2(u)x_2(v)=\\&e^{-u-v}\sinh(u-v)x_1(u)x_1(v)+e^{u-v}\sinh(u+v)x_1(v)x_2(u)+\\&e^{u+v}\sinh(u-v)z_1(u)z_2(v),\end{aligned}\tag{38}$$

发现: $$c^2-c_1c_2=e^{-\zeta}c.\tag{39}$$

则 $K(u)$ 的第二种形式(17)为

$$K(u)=\rho'(u)\begin{pmatrix}e^u\sinh(\zeta-u) & 0 & c_1\sinh(2u)\\ 0 & e^u\sinh(\zeta-u)+c\sinh(2u) & 0\\ c_2\sinh(2u) & 0 & e^{-u}\sinh(\zeta+u)\end{pmatrix},\tag{40}$$

经过验证,$K(u)$ (40)是存在的.

最后再来考虑 $K(u)$ 的第三种形式(18). 将(18)代入(3)式,由 Eq[6,8]得

$$\begin{aligned}&e^{-u+v}\sinh(u+v)x_2(u)x_3(v)+e^{u+v}\sinh(u-v)x_3(u)x_3(v)=\\&e^{-u-v}\sinh(u-v)x_2(v)x_2(u)+e^{u-v}\sinh(u+v)x_2(v)x_3(u).\end{aligned}\tag{41}$$

将(41)式两边同除 $x_3(u)x_3(v)$,对 v 求导并令 $v=0$ 得

$$\begin{aligned}x_2(u)&=e^u\sinh(\zeta-u)g(u),\\x_3(u)&=e^{-u}\sinh(\zeta+u)g(u),\end{aligned}\tag{42}$$

ζ 为任意参数,$g(u)$ 为不恒为零的任意参数. 将(42)式代入 Eq[2,3]

$$y_{12}(u)[x_3(v)-x_2(v)]=y_{12}(v)[x_3(u)-x_2(u)],\tag{43}$$

得: $$y_{12}(u)=c_1\sinh(2u)g(u),\tag{44}$$

c_1 为任意参数. 将(42)式代入 Eq[3,2],同样可得

$$y_{22}(u)=c_2\sinh(2u)g(u),\tag{45}$$

c_2 为任意参数. 将(42),(44)和(45)再代入 Eq[2,7]

$$\begin{aligned}&y_{12}(u)[e^{u-v}\sinh(u+v)x_1(v)-e^{u+v}\sinh(u-v)x_2(v)]=\\&y_{12}(v)[e^{-u+v}\sinh(u+v)x_1(u)+e^{u+v}\sinh(u-v)x_3(u)],\end{aligned}\tag{46}$$

后对 v 求导并令 $v=0$ 得

$$x_1(u)=x_2(u)+ce^{2u}\sinh(2u)g(u).\tag{47}$$

再将(42),(44),(45)和(47)式代入 Eq[3,7]

$$\begin{aligned}&e^{-u-v}\sinh(u-v)x_1(v)x_1(u)+e^{u-v}\sinh(u+v)x_1(v)x_3(u)=\\&e^{-u+v}\sinh(u+v)x_1(u)x_3(v)+e^{u+v}\sinh(u-v)x_3(u)x_3(v)+\\&e^{u+v}\sinh(u-v)y_{12}(u)y_{22}(v),\end{aligned}\tag{48}$$

发现:
$$c^2 - c_1c_2 = e^{\zeta} c. \tag{49}$$
则 $K(u)$ 的第三种形式(18)为
$$K(u) = \rho'(u)\begin{pmatrix} e^u\sinh(\zeta-u) + ce^{2u}\sinh(2u) & 0 & 0 \\ 0 & e^u\sinh(\zeta-u) & c_1\sinh(2u) \\ 0 & c_2\sinh(2u) & e^{-u}\sinh(\zeta+u) \end{pmatrix}, \tag{50}$$
$(\rho'(u) = \rho^K(u)g(u))$. 经过验证,(50)式是存在的

4　超对称 t-J模型反射方程的解

对于超对称 t-J模型,取其 R 矩阵为[4]
$$R(u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}, \tag{51}$$
其中 $R_{11}^{11}(u) = R_{22}^{22}(u) = a(u) = \sin(u+q)$, $R_{12}^{12}(u) = R_{13}^{13}(u) = R_{21}^{21}(u) = R_{23}^{23}(u) = R_{31}^{31}(u) = R_{32}^{32}(u) = b(u) = \sin(u)$, $R_{12}^{21}(u) = R_{13}^{31}(u) = R_{23}^{32}(u) = c(u) = e^{-iu}\sin(q)$, $R_{21}^{12}(u) = R_{31}^{13}(u) = R_{32}^{23}(u) = d(u) = e^{iu}\sin(q)$, $R_{33}^{33}(u) = w(u) = \sin(-u+q)$. $R(u)$仍然满足规则性, PT对称性,幺正性和弱交叉幺正性,其中的$\rho(u) = \sin(q+u)\sin(q-u)$, $\eta = \frac{1}{2}q$, $M = \mathrm{diag}(1, e^{2iq}, -e^{2iq})$, $f(u) = -\dfrac{\sin(u)}{\sin(q-u)}$. 仍然设超对称 t-J模型的 K 矩阵为(7)式,将(51)式和(7)式代入反射方程(3)式,由 Eq[1,9]
$$\sin(q-u+v)\sin(u+v)z_1(u)z_1(v) = \sin(q+u-v)\sin(u+v)z_1(u)z_1(v), \tag{52}$$
得:
$$z_1(u) = 0. \tag{53}$$
由 Eq[1,9]
$$\sin(q-u+v)\sin(u+v)z_2(u)z_2(v) = \sin(q+u-v)\sin(u+v)z_2(u)z_2(v), \tag{54}$$
得:
$$z_2(u) = 0. \tag{55}$$
由 Eq[5,9]
$$\sin(q-u+v)\sin(u+v)y_{12}(u)y_{12}(v) = \sin(q+u-v)\sin(u+v)y_{12}(u)y_{12}(v), \tag{56}$$
得:
$$y_{12}(u) = 0. \tag{57}$$

由 Eq[9,5]

$$\sin(q+u-v)\sin(u+v)y_{22}(u)y_{22}(v) = \sin(q-u+v)\sin(u+v)y_{22}(u)y_{22}(v), \tag{58}$$

得:

$$y_{22}(u) = 0. \tag{59}$$

因此 $K(u)$ 只有一种非对角形式

$$K(u) = \rho^K(u)\begin{pmatrix} x_1(u) & y_{11}(u) & 0 \\ y_{21}(u) & x_2(u) & 0 \\ 0 & 0 & x_3(u) \end{pmatrix}, \tag{60}$$

同第 3 节求解 $K(u)$ 第一种形式(16)一样,经过相同的步骤,得到 $K(u)$ (60)的具体形式

$$K(u) = \rho'(u)\begin{pmatrix} e^{-iu}\sin(\zeta+u) & c_1\sin(2u) & 0 \\ c_2\sin(2u) & e^{iu}\sin(\zeta-u) & 0 \\ 0 & 0 & e^{iu}\sin(\zeta-u)+ce^{i2u}\sin(2u) \end{pmatrix}, \tag{61}$$

其中 $\rho^K(u)$,$\rho'(u)$ 均为不恒为零的任意函数,c_1,c_2 和 c 之间的关系为

$$c^2 - c_1c_2 = e^{i\zeta}c, \tag{62}$$

即参数 c_1,c_2,c 中只有两个是任意的,ζ 为任意参数. 经过验证,(61)式是存在的.

5 结论

首先,从(30),(40),(50)和(61)式中可看出,每种形式的解中均只含有 3 个任意参数. 其次,由于对每一固定的 c_1 和 c_2,c 都可取两个值,故每种形式的解中都含有两个解. 另外,当每种形式的解中 $c_1 = c_2 = 0$ 时,发现(30)中 $c = 0$ 与(40)式中 $c = e^{-\zeta}$ 所得的结果相同,(40)式中 $c = 0$ 与(50)式中 $c = 0$ 所得的结果相同,因此从(30),(40)和(50)式中,得到 $A_2^{(1)}$ 模型的 4 个对角解,

$$\begin{aligned} &\text{a:}\quad \mathrm{diag}[x_1(u),\ x_2(u),\ e^{-4u}x_1(u)], \\ &\text{b:}\quad \mathrm{diag}[x_1(u),\ x_2(u),\ x_2(u)], \\ &\text{c:}\quad \mathrm{diag}[x_1(u),\ x_1(u),\ x_2(u)], \\ &\text{d:}\quad \mathrm{diag}[e^{4u}x_2(u),\ x_1(u),\ x_2(u)], \end{aligned} \tag{63}$$

其中的 $x_1(u)$ 与 $x_2(u)$ 分别为(21)式中的 $x_1(u)$ 与 $x_2(u)$. 可以看出,解 a 与 b 是等价的. 而由(61)式只能得到超对称 t-J模型的两个对角解,

$$\begin{aligned} &\mathrm{diag}(\tilde{x}_1(u),\ \tilde{x}_2(u),\ \tilde{x}_2(u)), \\ &\mathrm{diag}(\tilde{x}_1(u),\ \tilde{x}_2(u),\ e^{4iu}\tilde{x}_1(u)), \end{aligned} \tag{64}$$

但超对称 t-J模型还存在一个对角解[4]

$$\mathrm{diag}(\tilde{x}_1(u),\ \tilde{x}_1(u),\ \tilde{x}_2(u)), \tag{65}$$

这里 $\tilde{x}_1(u) = e^{-iu}\sin(\zeta + u)$, $\tilde{x}_2(u) = e^{iu}\sin(\zeta - u)$，因此超对称 t-J模型有 3 个对角解(64)和(65). 可验证这些对角解均是存在的.

对岳瑞宏先生的帮助表示感谢.

参考文献(References)

1 Sklyanin E K. J. Phys., 1988, **A21**:2735

2 Mezicescu L, Nepomechie R I. J. Phys., 1991, **A24**:L17

3 de Vega H J, Gonzalez-Ruiz A. J. Phys., 1993, **A26**:L519

4 Gonzalez-Ruiz A. Nucl. Phys., 1994, **B424**:468

5 FU H C, GE M L. J. Phys., 1994, **A27**:4457

6 HOU B Y, YUE R H. Phys. Lett., 1993, **A183**:169

7 HOU B Y, SHI K J, FAN H et al. Commun. Theor. Phys., 1995, **23**:163

8 Batchelor M T, Fridkin V, Kuniba A et al. Phys. Lett., 1996, **B376**:266—274

9 CHEN Min, HOU BoYu, SHI KangJie. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1996, **20**:794
(陈敏，侯伯宇，石康杰. 高能物理与核物理，1996，**20**：794)

10 SHI KangJie, LI GuangLiang, FAN Heng et al. High Energy Phis. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1999, **23**:425
(石康杰，李广良，范桁等. 高能物理与核物理，1999，**23**：425)

11 Perk J H, Schultz C L. Phys. Lett., 1981, **A84**:407

12 YANG C N, YANG C P. Phys. Rev. Lett., 1966, **105**:321—322; 1966, **151**:258

13 Baxter R J. Exactly Solved Models in Statitical Mechanics. London: Academic Press, 1982

14 Babelon O, de Vega H J, Viallet C M. Nucl. Phys., 1981, **B190**:542

附　录

Eq[2, 9]: $y_{12}(v)z_1(u)[\sinh(q+u-v)-\sinh(u-v)] = e^{u-v}\sinh(q)y_{12}(u)z_1(v)$,

Eq[4, 9]: $y_{12}(u)z_1(v)[\sinh(q+u-v)-\sinh(u-v)] = e^{-u+v}\sinh(q)y_{12}(v)z_1(u)$,

Eq[3, 5]: $y_{11}(u)y_{22}(v)[\sinh(q+u-v)-\sinh(u-v)] = e^{u-v}\sinh(q)y_{11}(v)y_{22}(u)$,

Eq[7, 5]: $y_{11}(v)y_{22}(u)[\sinh(q+u-v)-\sinh(u-v)] = e^{-u+v}\sinh(q)y_{11}(u)y_{22}(v)$,

Eq[5, 3]: $y_{12}(v)y_{21}(u)[\sinh(q+u-v)-\sinh(u-v)] = e^{u-v}\sinh(q)y_{12}(u)y_{21}(v)$,

Eq[5, 7]: $y_{12}(u)y_{21}(v)[\sinh(q+u-v)-\sinh(u-v)] = e^{-u+v}\sinh(q)y_{12}(v)y_{21}(u)$,

Eq[6, 1]: $y_{21}(u)z_2(v)[\sinh(q+u-v)-\sinh(u-v)] = e^{u-v}\sinh(q)y_{21}(v)z_2(u)$,

Eq[8, 1]: $y_{21}(v)z_2(u)[\sinh(q+u-v)-\sinh(u-v)] = e^{-u+v}\sinh(q)y_{21}(u)z_2(v)$,

Eq[9, 2]: $y_{22}(v)z_2(u)[\sinh(q+u-v)-\sinh(u-v)] = e^{u-v}\sinh(q)y_{22}(u)z_2(v)$,

Eq[9, 4]: $y_{22}(u)z_2(v)[\sinh(q+u-v)-\sinh(u-v)] = e^{-u+v}\sin(q)y_{22}(v)z_2(u)$,

Eq[1, 7]:
$$e^{-u+v}\sinh(q)\sinh(u+v)x_1(u)z_1(v) + \sinh(u-v)[e^{u+v}\sinh(q)y_{11}(v)y_{12}(u) + \sinh(q+u+v)x_1(v)z_1(u) + e^{u+v}\sinh(q)x_3(u)z_1(v)] = \sinh(q+u-v)\sinh(u+v)x_1(v)z_1(u),$$

Eq[9, 6]:
$$e^{u-v}\sinh(q)\sinh(u+v)x_3(u)y_{22}(v) + \sinh(u-v)[\sinh(q+u+v)x_3(v)y_{22}(u) + e^{-u-v}\sinh(q)x_2(u)y_{22}(v) + e^{-u-v}\sinh(q)y_{11}(u)z_2(v)] = \sinh(q+u-v)\sinh(u+v)x_3(v)y_{22}(u),$$

Eq[7, 1]: $\sinh(q+u-v)\sinh(u+v)x_1(v)z_2(u) =$

$$e^{u+v}\sinh(q)\sinh(u-v)y_{21}(v)y_{22}(u) + \sinh(u-v)\sinh(q+u+v)x_1(v)z_2(u) +$$
$$[e^{-u+v}\sinh(q)\sinh(u+v)x_1(u) + e^{u+v}\sinh(q)\sinh(u-v)x_3(u)]z_2(v),$$

Eq[6, 9]: $\sinh(q+u-v)\sinh(u+v)x_3(v)y_{12}(u) =$

$$\sinh(u-v)\sinh(q+u+v)x_3(v)y_{12}(u) + [e^{-u-v}\sinh(q)\sinh(u-v)x_2(u) +$$
$$e^{u-v}\sinh(q)\sinh(u+v)x_3(u)]y_{12}(v) + e^{-u-v}\sinh(q)\sinh(u-v)y_{21}(u)z_1(v).$$

Constant Solutions to the Reflection Equation of 15 Vertex Model

SHI KangJie LI GuangLiang FAN Heng HOU BoYu

(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an* 710069, *China*)

Abstract The non-diagonal solutions to the reflection equation of 15 vertex model $A_2^{(1)}$ model and supersymmetric t-J model were obtained. The results show that solutions of $A_2^{(1)}$ model' have three forms and each form contains two solutions; the solution of supersymmetric t-J model' takes only one form in which there are two solutions; each one of all those nondiagonal solutions only have three arbitr ary parameters.

Key words $A_2^{(1)}$ model, supersymmetric t-J model, reflection equation, nondiagonal solution

Received 9 November 1998