第 26 卷 第 1 期 高 能 物 理 与 核 物 理 Vol.26, No.1
2002年1月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jan.,2002

规范场静态解的稳定性

殷育东[1)] 黄涛
(首都师范大学物理系 北京 100037) (中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

摘要 对有规范条件或约束的非线性理论,研究了其驻点的 Hessian 形式. 指出了规范场的经典解的稳定性由包含拉格朗日乘子贡献的有效拉氏量的二阶变分决定.

关键词 经典解 稳定性 有效拉氏量 微扰算子 拉格朗日乘子

1 引言

规范场的经典解在物理上有许多重要应用[1—8]. 但除了不多的几个解之外,我们对这些解的了解并不多. 一般这些解有非平庸的拓扑荷,有限的能量或作用量等. 毫无疑问,这些解的最重要的性质是它们的稳定性. 遗憾的是由于理论的非线性,我们很难获得解的封闭的解析形式以及解附近的微扰算子形式,并且对解的稳定性研究在理论上有一定的混乱. 一般地说,研究一个解的稳定性要比给出一个解的 ansatz 困难得多. 目前研究规范场的经典解的稳定性有两种途径,一是以拓扑的角度研究定义在场流形上的驻点的稳定性[9—11],二是解析地研究微扰算子的谱. 拓扑的方法有一定的局限性,解析地研究经典解的稳定性是根本的.

对于定义在拓扑非平庸流形上的场,其经典解的稳定性研究可以用传统的方法进行,令模型的作用量为

$$S = \int \mathrm{d}^4 x L(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{1}$$

如 ϕ_0 为运动方程的解,则在场流形中驻点 ϕ_0 的附近研究

$$\delta^2 S = \int \mathrm{d}^4 x \delta^2 \hat{H}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{2}$$

的符号,就可以确定解的稳定性. 但对于定义在拓扑非平庸的场流形上的规范场来说,由于规范对称性,存在规范条件,场量不独立,问题就变得复杂难解. 目前有两种途径研究解的稳定性. 如对 $U(1)$ 规范理论,其作用量为

2001-05-08 收稿,2001-07-09 收修改稿

1) E-mail: yyd-phy@mail.cnu.edu.cn

$$S = \int d^4\left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + (D_\mu\phi)^+ D^\mu\phi - \lambda\left(\phi^+\phi - \frac{\eta^2}{2}\right)^2\right], \tag{3}$$

式中

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \tag{4}$$

取 $A_0 = 0$ 规范,则有著名的 Nielsen 和 Olesen 的 string 解. 对这个解的稳定性,有两种研究方法.

a. 在静态下,能量泛函为[12—15]

$$E = \int d^3x\left[(\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2 + (D_i\phi)^+ D_i\phi + \lambda\left(\phi^+\phi - \frac{\eta^2}{2}\right)^2\right], \tag{5}$$

研究驻点附近 $\delta^2 E$ 的符号,判断解的稳定性.

b. 在 background 规范下[16—18]

$$F(A,\phi) = \partial_\mu A_\mu - i(\phi^* \phi_c - \phi_c^* \phi) = 0. \tag{6}$$

有效拉氏量为

$$L_{eff} = L - \frac{1}{2}F^2(A,\phi) + L_{ghost}, \tag{7}$$

其中 L_{ghost}是相应的鬼场. 研究 $\delta^2 S_{eff}$的符号,判断解的稳定性.

这两个方法是如此的不同,在方法 a 中,有 5 个自由度,而在方法 b 中,除去鬼场(一般鬼场取真空值从而和物理场退耦),却仍然有 6 个自由度. 两个方法是否能对解的稳定性作出同一判断,是值得考虑的. 一个自然的问题是有效拉氏量的变分方法和经典能量泛函的变分方法是否一致. 这正是本文所要研究的. 对一般的规范场,设其规范对称群为 G,作用量为

$$S = \int d^4 x L(A_\mu, \partial_\mu A_\nu). \tag{8}$$

规范条件为 $F_a(A_\mu) = 0$, $a = 1,\cdots,n$,这里 n 为群 G 的维数.

这个问题等效于

$$S = \int d^4 x\left[L(A_\mu, \partial_\mu A_\nu) + \sum_a \lambda_a (F_a(A_\mu))^2\right] \tag{9}$$

的变分问题. 问题是在场流形的驻点($A_{S\mu}, \lambda_{sa}$)附近展开时,在 $\delta^2 S$ 中将出现 $\delta\lambda_a$ 的一阶项. 无法判定 $\delta^2 S$ 的符号. 在这篇文章中,首先研究 1+1 维 $O(3)\sigma$ 模型,讨论如何处理拉格朗日乘子的一次项,然后推广到一般的情形.

2　1+1 维 $O(3)$sigma 模型

修正的 1+1 维 $O(3)$模型的作用量为[10,19]

$$S = \int d^2\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 - f(n_3)\right], \tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{n}^2 = \sum_{a=1}^{3} n_a n_a = 1. \tag{11}$$

度规为

$$g_{\mu\nu} = (1, -1). \tag{12}$$

对正定的和有限能量,要求对 $|n_3| \leqslant 1, f(n_3) \geqslant 0$. 且当 $|x| \to \infty$ 时, $f(n_3) \to 0$. 包含约束的作用量为

$$S = \int d^2 \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 - f(n_3) + \lambda (\boldsymbol{n}^2 - 1) \right], \tag{13}$$

其中 λ 为拉格朗日乘子. 在静态下,能量为

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \boldsymbol{n} \right)^2 + f(n_3) - \lambda (\boldsymbol{n}^2 - 1) \right]. \tag{14}$$

场的运动方程为

$$n''_1 = -2\lambda n_1, \quad n''_2 = -2\lambda n_2, \quad n''_3 = -2\lambda n_3 \quad \dot{f}(n_3), \quad \boldsymbol{n}^2 = 1, \tag{15}$$

式中 $\dot{f} = \dfrac{df}{dn_3}$. 设 n_{s3} 为方程

$$\frac{1}{2} \frac{n'^2_3}{1 - n_3^2} = f(n_3) \tag{16}$$

的解,则

$$\boldsymbol{n} = (\sin\delta \sqrt{1 - n_{s3}^2}, \ \cos\delta \sqrt{1 - n_{s3}^2}, n_{s3}),$$

$$\lambda_s = f(n_{s3}) + \frac{1}{2} n_{s3} f(n_{s3}), \tag{17}$$

是运动方程组的有限能量的解. 相应的能量为

$$E = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx f(n_{s3}). \tag{18}$$

这个解和参数化下求得的解是一致的[20].

3 有效拉氏量

如果把场 $(\boldsymbol{n}, \lambda)$ 在驻点 $(\boldsymbol{n}_s, \lambda_s)$ 附近直接展开研究作用量的变分,则出现关于乘子 $\delta\lambda$ 的一阶项,无法判断作用量的二阶变分的符号. 就这个意义而言,经典的拉氏量不能研究解的稳定性. 在文献中已阐明了经典解的稳定性由包括了流形的测度的贡献的有效拉氏量决定[20]. 考虑路径积分

$$Z = \int [d\boldsymbol{n}] \delta(\boldsymbol{n}^2 - 1) \exp\left[i \int d^2 x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 - f(n_3) \right) \right] =$$

$$\int [d\boldsymbol{n}][d\lambda] \exp\left[i \int d^2 x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 - f(n_3) + \lambda (\boldsymbol{n}^2 - 1) \right) \right] \tag{19}$$

在解 $(\boldsymbol{n}_s, \lambda_s)$ 附近,令

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_s + \delta \boldsymbol{n}, \quad \lambda = \lambda_s + \delta\lambda. \tag{20}$$

代入路径积分,并展开近似到二阶项,并对 $\delta\lambda$ 积分

$$Z = \int [d\delta \boldsymbol{n}] \delta(2\boldsymbol{n} \cdot \delta \boldsymbol{n}) \exp(iS_0) \exp\left\{ i \int d^2 \left[\frac{1}{2} (\partial \delta \boldsymbol{n})^2 - \right.\right.$$

$$\frac{1}{2}\ddot{f}(n_{s3})(\delta n_{s3})^2 + \lambda_s(\delta \boldsymbol{n})^2\Big]\Big\}. \tag{21}$$

在上式的 Dirac 函数中,已去掉了 $\delta \boldsymbol{n}$ 的二次项. 对 δn_3 积分并令

$$\begin{aligned} u_1 &= (n_{s2}\delta n_2 + n_{s1}\delta n_1)\frac{1}{\sqrt{1-n_{s3}^2}}, \\ u_2 &= (n_{s1}\delta n_2 - n_{s2}\delta n_1)\frac{1}{\sqrt{1-n_{s3}^2}} \end{aligned} \tag{22}$$

路经积分变成

$$Z = \int \frac{[\mathrm{d}u_1][\mathrm{d}u_2]}{n_{s3}}\exp(\mathrm{i}S_0)\exp\Big\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2 x\Big[\frac{1}{2}(\partial_\mu u_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu u_2)^2 +$$

$$\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \frac{\sqrt{1-n_{s3}^2}}{n_{s3}}u_1\right)^2 - \frac{1}{2}\ddot{f}^2(n_{s3})\frac{1-n_{s3}^2}{n_{s3}^2}u_1^2 + \lambda_0(u_1^2+u_2^2) + \lambda_0\frac{1-n_{s3}^2}{n_{s3}^2}u_1^2\Big\}.$$

令 $u_1 = n_{s3}\bar{u}_1$, $u_2 = \bar{u}_2$(u_1, u_2 和 $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ 的边界条件是一样的,这和参数化的情形相同[20]),并将 λ_0 代入得

$$Z \quad \int [\mathrm{d}\,\bar{u}_1][\mathrm{d}\,\bar{u}_2]\exp(\mathrm{i}S_0)\exp\Big\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2 x[\bar{u}_1\hat{D}_1\,\bar{u}_1 + \bar{u}_2\hat{D}_2\,\bar{u}_2]\Big\}, \tag{24}$$

式中

$$\hat{D}_1 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hat{H}_1,\quad \hat{D}_2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hat{H}_2,$$

两个哈密顿算子分别为

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-n_{s3}^2)\ddot{f}(n_{s3}) - n_{s3}\dot{f}(n_{s3}), \\ \hat{H}_2 &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2f(n_{s3}) - n_{s3}\dot{f}(n_{s3}). \end{aligned}$$

正是文献所求得的算子形式[21].

在以上的计算中,可以发现

1) L_{eff}中,$\lambda_s(\delta \boldsymbol{n})^2$ 相当于规范固定项.

2) 必须将多余的自由度 $\delta\lambda$ 积掉,从而出现一个 δ 函数,积分掉 δ 函数后,系统的独立自由度得到恢复.

3) 以上的计算和底空间的维数无关.

4) 系统的动力学由 S_{eff}决定. 在 $\delta^2 S_{\text{eff}}$中必须考虑辅助场 $\delta\lambda$ 的贡献,这样才能决定解的稳定性.

4　规范场经典解的稳定性

设系统的作用量为

$$S = \int \mathrm{d}^4 x L(A_\mu, \partial_\mu A_\nu).$$

$$\frac{1}{2}f(n_{s3})(\delta n_{s3})^2 + \lambda_s(\delta \boldsymbol{n})^2\Big]\Big\}.$$

在上式的 Dirac 函数中,已去掉了 $\delta \boldsymbol{n}$ 的二次项. 对 δn_3 积分并令

$$u_1 = (n_{s2}\delta n_2 + n_{s1}\delta n_1)\frac{1}{\sqrt{1-n_{s3}^2}},$$

$$u_2 = (n_{s1}\delta n_2 - n_{s2}\delta n_1)\frac{1}{\sqrt{1-n_{s3}^2}}$$

路经积分变成

$$Z = \int \frac{[\mathrm{d}u_1][\mathrm{d}u_2]}{n_{s3}}\exp(\mathrm{i}S_0)\exp\Big\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2 x\Big[\frac{1}{2}(\partial_\mu u_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu u_2)^2 +$$

$$\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \frac{\sqrt{1-n_{s3}^2}}{n_{s3}}u_1\right)^2 - \frac{1}{2}\ddot{f}^2(n_{s3})\frac{1-n_{s3}^2}{n_{s3}^2}u_1^2 + \lambda_0(u_1^2+u_2^2) + \lambda_0\frac{1-n_{s3}^2}{n_{s3}^2}u_1^2\Big]\Big\}. \tag{23}$$

令 $u_1 = n_{s3}\bar{u}_1$, $u_2 = \bar{u}_2$($\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ 和 u_1, u_2 的边界条件是一样的,这和参数化的情形相同[20]),并将 λ_0 代入得

$$Z = \int[\mathrm{d}\,\bar{u}_1][\mathrm{d}\,\bar{u}_2]\exp(\mathrm{i}S_0)\exp\Big\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2 x[\bar{u}_1\hat{D}_1\,\bar{u}_1 + \bar{u}_2\hat{D}_2\,\bar{u}_2]\Big\}, \tag{24}$$

式中

$$\hat{D}_1 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hat{H}_1,\ \hat{D}_2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hat{H}_2, \tag{25}$$

两个哈密顿算子分别为

$$\begin{aligned}\hat{H}_1 &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-n_{s3}^2)\ddot{f}(n_{s3}) - n_{s3}\dot{f}(n_{s3}),\\ \hat{H}_2 &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2f(n_{s3}) - n_{s3}\dot{f}(n_{s3}).\end{aligned} \tag{26}$$

正是文献所求得的算子形式[21].

在以上的计算中,可以发现

1) L_{eff}中,$\lambda_s(\delta \boldsymbol{n})^2$ 相当于规范固定项.

2) 必须将多余的自由度 $\delta\lambda$ 积掉,从而出现一个 δ 函数,积分掉 δ 函数后,系统的独立自由度得到恢复.

3) 以上的计算和底空间的维数无关.

4) 系统的动力学由 S_{eff}决定. 在 $\delta^2 S_{\mathrm{eff}}$中必须考虑辅助场 $\delta\lambda$ 的贡献,这样才能决定解的稳定性.

4　规范场经典解的稳定性

设系统的作用量为

$$S = \int \mathrm{d}^4 x L(A_\mu, \partial_\mu A_\nu).$$

其规范对称群为 G,群 G 的维数为 n. 规范条件为

$$F^a(A_\mu,\phi,\phi^*)=0, \tag{28}$$

这里 $a=1,\cdots,n$. 一般 $F^a(A_\mu,\phi,\phi^*)$是其宗量的线性函数,

$$F^a(A_\mu+\delta A_\mu,\phi+\delta\phi,\phi^*+\delta\phi^*)=F^a(A_\mu,\phi,\phi^*)+F^a(\delta A_\mu,\delta\phi,\delta\phi^*). \tag{29}$$

考虑路径积分

$$Z=\int[\mathrm{d}A_\mu][\mathrm{d}\phi][\mathrm{d}\phi^*]\det M\prod_a\delta[F^a(A,\phi,\phi^*)^2]\exp\left[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xL(A_\mu,\partial_\mu A_\nu,\phi,\phi^*)\right]=$$

$$\int[\mathrm{d}A_\mu][\mathrm{d}\phi][\mathrm{d}\phi^*][\mathrm{d}\lambda_a][\mathrm{d}C][\mathrm{d}C^+]\exp\left[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xL_{\mathrm{eff}}\right], \tag{30}$$

式中

$$L_{\mathrm{eff}}=L+\sum_a\lambda_a[F^a(A_\mu,\phi,\phi^*)]^2+C_a^+M^{a\beta}C_\beta, \tag{31}$$

C_a^+ 和 C_β 为相应规范 F^a 的鬼场, $\det M$ 为轨道面 $F^a(A_\mu,\phi,\phi^*)=0$ 上的测度,

$$M^{a\beta}(x,y)=\frac{\delta F^a[A_\mu^{ag}](x)}{\delta u^{\beta(g)}(y)}, \tag{32}$$

这里 $u\in G$. 模型的动力学由 S_{eff}给出. 运动方程为

$$\frac{\partial L}{\partial A_\nu}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}=0,\ \frac{\partial L}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{L}{\partial(\partial_\mu\phi)}=0,\ \frac{\partial L}{\partial\phi^*}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{L}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}=0,$$
$$F^a=0,\ MC=0,\ C^+M=0. \tag{33}$$

对经典解,鬼场取真空值. 注意到此时规范常数 λ_a 可取任意值,一般从物理考虑取规范常数. 设$(A_{s\mu},\phi_s,\phi_s^*,\ C^+,\ C\lambda_{sa})$为场流形的驻点,在驻点附近展开规范场

$$\begin{gathered}A_\mu=A_{s\mu}+\delta A_\mu,\ \phi=\phi_s+\delta\phi,\ \phi^*=\phi_s^*+\delta\phi^*\\ C^+=\delta C^+\quad C=\delta C,\ \lambda=\lambda_{sa}+\delta\lambda_a.\end{gathered} \tag{34}$$

代入路径积分,展开到场的二阶项,最终得

$$Z=\int[\mathrm{d}\delta A_\mu][\mathrm{d}\delta\phi][\mathrm{d}\delta\phi^*]\prod_a\delta[(F_a(\delta A,\delta\phi,\delta\phi^*))^2]\det M|_{A_\mu=A_{s\mu}}\exp(\mathrm{i}S_0)\cdot$$

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\delta^2L+\sum_a\lambda_{sa}(F^a(\delta A_\mu,\delta\phi,\delta\phi^*))^2\right\}. \tag{35}$$

其中$\det M|_{A_\mu=A_{s\mu}}$为轨道面的测度的变化. 把 δ 函数积分后,则系统恢复到原来的自由度. 路径积分仍然在原来的轨道面上进行. 需要指出的是,驻点的稳定性并不仅由

$$\delta^2L_{\mathrm{eff}}=\delta^2L+\sum_a\lambda_{sa}(F^a(\delta A_\mu,\delta\phi,\delta\phi^*))^2 \tag{36}$$

决定,而由包括测度变化贡献的有效拉氏量的二阶变分决定. 值得指出的是,和 $O(3)\sigma$ 模型一样,驻点和鬼场无关,但它的稳定性和鬼场有关. 当取时性规范时,对静态的驻点

$$Z=\int[\mathrm{d}\delta A_i][\mathrm{d}\delta\phi][\mathrm{d}\delta\phi^*]\exp(\mathrm{i}S_0)\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[(\delta A_i,\delta\phi,\delta\phi^*)\hat{D}(\delta A_i,\delta\phi,\delta\phi^*)^{\mathrm{T}}\right\}, \tag{37}$$

式中算子

$$\hat{D}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\hat{H}, \tag{38}$$

$\hat{H}$为哈密顿算子. 所以此时,经典的能量的二阶变分的符号决定解的稳定性.

当取朗道规范或 background 规范时,积分 δ 函数后,$\delta^2 L$ 中将出现场量 δA_μ 的三阶导数项,同时测度因子 M 将是微分形式,此时必须考虑鬼场的本征方程

$$MC = \lambda C.$$

5 结论

在以上的讨论中,对有约束的 1 + 1 维 $O(3)\sigma$ 理论和一般的规范场理论中的经典解的稳定性的判据做了分析. 我们关注的是一般的规范场理论. 但是由于规范场复杂难解,用定义在 S^2 上的 $O(3)\sigma$ 模型对有关问题进行了分析,并推广到了一般的规范场理论.

如果我们关注的只是规范场的动力学性质,而不是拓扑性质,则可以把有规范对称性的场系统(A_μ, ϕ, ϕ^*)等价于无规范对称性的场系统($A_\mu, \phi, \phi^*, \lambda$). 这个系统的驻点($A_{\mu s}, \phi_s, \phi_s^*, \lambda_s$)的稳定性由 $\delta^2 L_{\mathrm{eff}}$决定. 只是其中出现的拉格朗日乘子变分的一阶项 $\delta\lambda$,不能用经典的方法去处理(因为经典的对驻点的稳定性判据由 Hessian 决定,只出现场量的变分的二阶项). 在 $\Delta L = L_{\mathrm{eff}}(A_\mu, \phi, \phi^*, \lambda) - L_{\mathrm{eff}}(A_{\mu s}, \phi_s, \phi_s^*, \lambda_s)$中的一阶项 $\delta A_\mu, \delta\phi, \delta\phi^*$ 可以借助运动方程消去,而 $\delta\lambda$ 仍然存在. 因而 $\Delta L = \delta L + \delta^2 L$ 中的二阶变分 $\delta^2 L$ 包含 $\delta\lambda$ 的一阶项是合理的. 这才是驻点稳定性的判据. 对退化的驻点,即当 $\delta^2 L = 0$ 时,$\delta\lambda$ 对高阶变分也有贡献. $\delta\lambda$ 对 $\delta^2 L$ 的贡献是通过在路径积分中贡献一个测度因子来实现的. 这也是驻点的稳定性和场流形的整体性质相关的表现. 这最终也使得系统的自由度得到恢复. 这一点是至关重要的. 因为系统的自由度是系统的特征. 系统的能量在驻点附近,沿着任何方向减小,都是驻点不稳定的判据. 因而在多余的自由度上讨论驻点的稳定性是没有意义的.

另外,注意到当一个有约束 $F = 0$(相应地,$\delta F = 0$)的系统(A_μ, ϕ, ϕ^*)等价于一个无约束的系统($A_\mu, \phi, \phi^*, \lambda$)时,约束就解除了. 因而在 $\delta^2 L$ 中不能随意加上$(\delta F)^2$. 这也许是产生错误的一个原因. 事实上在 $\delta^2 L$ 中加上$(\delta F)^2$ 项(即规范固定项),是常用的消去拉氏量二阶变分中一些非线性项的方法. 但这个方法对驻点的稳定性问题而言,是不恰当的. 另一个可能产生错误的原因,是在 $\delta^2 L$ 中加上一正定的项,并不一定使得系统的负模减少,却可能使得系统出现负模.

总结上述讨论,得到以下结论:规范场的经典解的稳定性由包括了拉格朗日乘子的贡献的有效拉氏量的二阶变分决定;如取时性规范时,经典的能量泛函的变分的符号是解的稳定性的判据.

参考文献(References)

1 Klinkhamer F R. Phys. Lett., 1990, **B246**:131

2 Arnold P, Mclerran L. Phys. Rev., 1987, **D36**:581

3 Kunz J, Brihaye Y. Phys. Lett., 1989, **B216**:353

4 Kuzimin V. Rubakov V, Shaposhinikov M. Phys. Lett., 1985, **B155**:36

5 Vachaspati T. Phys. Rev. Lett., 1992, **68**:1977;1992,**69**:216

6 Nielsen H B, Olesen P., Nucl. Phys., 1973, **B61**:45

7 Vachaspati T, Barriola M. Phys. Rev. Lett., 1992, **69**:86

8 Barriola M, Vachaspati T. Phys. Rev., 1994, **D50**:2819

9 Manton N S. Phys. Rev., 1983, **D28**:2019

10 Mottola E, Wipf A. Phys. Rev., 1989, **D39**:588; Mccleran L. ACTA Physica Polonica, 1989, **B28**:249

11 Klinkhamer F R, Olesen P. Nucl. Phys., 1994, **B422**:227

12 Yaffe L G. Phys. Rev., 1989, **D40**:3463

13 James M. Perivolaropoulos L, Vachaspati T. Phys. Rev., 1992, **D46**:5232; Nucl. Phys., 1993, **B359**:534

14 Klinkhame F R, Monton S N. Phys. Rev., 1984, **D30**:2212

15 Brihaye Y, Kosinski P. Mod. Phys. Lett., 1999, **A4**:247

16 Goodband M, Hindmarsh M. Phys. Rev., 1995, **D52**:4621; Phys. Lett., 1995, **B363**:58

17 Gustafson S, Sigal I M. Comm. Math. Phys., 2000, **210**:257

18 Brihaye Y, Giller S, Kosinski P et al. Phys. Lett., 1992, **B293**:383; Bochkarev A I. Shaposhnikov M E. Mod. Phys. Lett., 1987, **A2**:991

19 Abdalla E. 2 Dimensional Quantum Field Theory, World Scientific, 1991

20 YIN Yu-Dong, WEN Jia-Ru, HUANG Tao. Phys. Lett., 1996, **B373**:309

21 YIN Yu-Dong, HUANG Tao. The Stability of Static Solutions under Parametrizations in the O(3) σ Model in 1 + 1 Dimension, preprint

Stability of the Classical Solutions of Gauge Theory

YIN Yu-Dong[1)]

(Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100037, China)

HUANG Tao

(Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract We introduce the lagrange multiplier method to study the stability of a classical solution. We analyze the Hessian form of a starting point in the O(3) sigma model and generalize the result to the gauge theory. We conclude that the stability of a classical solution of the gauge theory is determined by the second variation of the effective Lagrangian including the contribution of the lagrange multiplier. The variational sign of the classical energy functional is a judgement of the solution stability.

Key words classical solution, stability, fluctuation operator, effective Lagrangian, Lagrangian multiplier

---

Received 8 May 2001, Revised 9 July 2001

1) E-mail: yyd-phy@mail.cnu.edu.cn