

# 旋转测磁仪性能的分析

徐 建 铭

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

摘要 分析了旋转测磁仪性能和它的参数及加工精度的关系。

关键词 旋转测磁仪 双线圈测量 测量精度 磁中心 励磁曲线

旋转测磁仪是测量多极磁体磁场性能的有效设备,常用来测量磁体的磁场分布、磁中心位置、励磁曲线和批量多极磁体的一致性。下面将分析测量精度和测磁仪参数及加工误差的关系。

## 1 测磁线圈中的感应电压

在极坐标系里,磁场分布可表达为

$$B(r, \theta, z) = B_\theta + iB_r = \sum_n B_n(z) \left(\frac{r}{r_R}\right)^{n-1} e^{i(n\theta + \varphi_n)}$$

即

$$\begin{aligned} B_r(r, \theta, z) &= \sum_n B_n(z) \left(\frac{r}{r_R}\right)^{n-1} \sin(n\theta + \varphi_n), \\ B_\theta(r, \theta, z) &= \sum_n B_n(z) \left(\frac{r}{r_R}\right)^{n-1} \cos(n\theta + \varphi_n). \end{aligned} \quad (3)$$

$B_r$  和  $B_\theta$  分别是磁场  $B$  的径向和切向分量。 $r_R$  是参考半径,为一常数。 $z$  轴垂直于  $(r, \theta)$  平面,是沿磁体长度方向的坐标。在通用的旋转测磁仪里有两个测磁线圈,它们的导线的坐标分别是:主线圈是  $(R_1, 0)$  和  $(R_2, \pi)$ ;反抵线圈是  $(R_3, 0)$  和  $(R_4, \pi)$ 。线圈沿  $z$  方向长度为  $L$ ,主线圈的匝数为  $N_m$ ,反抵线圈匝数是  $N_a$ ,测磁仪旋转的角速度是  $\omega$ 。两个线圈中的感应电压  $V_m$  和  $V_a$  分别是

$$\begin{aligned} &= \sum_n V_{m,n} = LN_m \omega \sum_n \bar{B}_n \frac{1}{r_R^{n-1}} [R_1^n - (-1)^n R_2^n] \sin(n\omega t + \varphi_n), \\ &= \sum_n V_{a,n} = LN_a \omega \sum_n \bar{B}_n \frac{1}{r_R^{n-1}} [R_3^n - (-1)^n R_4^n] \sin(n\omega t + \varphi_n). \end{aligned} \quad (5)$$

上二式中  $\bar{B}_n$  是

$$\bar{B}_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} B_n(z) dz. \quad (6)$$

长度  $L$  应能包括磁体的全部边缘场.

感应电压  $V_m, V_a$  中包含有角频率为  $n\omega$  的分量  $V_{m,n}$  和  $V_{a,n}$ , 它们的表示式是

$$V_{m,n} = LN_m \omega \frac{\bar{B}_n}{r_R^{n-1}} [R_1^n - (-1)^n R_2^n] \sin(n\omega t + \varphi_n), \quad (7)$$

$$V_{a,n} = LN_a \omega \frac{\bar{B}_n}{r_R^{n-1}} [R_3^n - (-1)^n R_4^n] \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (8)$$

利用 FFT 可以分析测定各种角频率的感应电压的幅值  $V_{m,n,\max}$  和  $V_{a,n,\max}$  及相角  $\varphi_n$ . 电压幅值正比于  $2n$  极磁场分量的幅值  $\bar{B}_n$ , 相角  $\varphi_n$  是  $2n$  极磁场分量的空间分布相角 (见式 (1)).

以上分析中假定测磁仪的旋转中心和磁场分布中心重合. 实际测量时, 两个中心未必重合, 旋转中心在  $(r, \theta)$  系统中可能位于  $(\Delta r, \Delta \theta)$ . 文献 [1] 分析了安装误差  $\Delta r, \Delta \theta$  对测量结果的影响, 分析结果表明, 当测量  $2N$  极磁体时, 除对  $n = N - 1$  的磁场分量外, 对其他分量的测量结果的影响是二级小量, 可忽略不计. 下面只在分析四极磁体的磁中心测量时, 才考虑这项安装误差的影响.

## 2 双线圈测量

在  $2N$  极磁体里,  $n \neq N$  的磁场分量  $\bar{B}_n$  远小于主磁场  $\bar{B}_N$ , 为了减少主磁场对  $n \neq N$  的磁场分量感应讯号的影响, 改善这些磁场分量的测量精度, 常采用双线圈测量. 适当地选择主线圈和反抵线圈的参数, 使得主磁场  $\bar{B}_N$  在两个线圈中感应的电压相等. 把两个线圈反向串联, 主磁场感应电压相互抵消, 则双线圈输出电压只保留  $n \neq N$  的磁场分量所产生的感应电压. 双线圈的输出电压  $E$  的表示式是

$$E = \sum_n E_n = \sum_n (V_{m,n} - V_{a,n}), \quad (9)$$

$$E_n = LN_m \omega \frac{\bar{B}_n}{r_R^{n-1}} \left\{ [R_1^n - (-1)^n R_2^n] - \frac{N_a}{N_m} [R_3^n - (-1)^n R_4^n] \right\} \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (10)$$

选择测磁仪参数时要使得  $E_n = 0$ , 即

$$R_1^n - (-1)^n R_2^n = \frac{N_a}{N_m} [R_3^n - (-1)^n R_4^n]. \quad (11)$$

测磁仪加工误差一方面使  $R_1, R_2, R_3, R_4$  偏离设计值, 以致式 (11) 不能满足. 另一方面还会使四组导线不能位于通过旋转中心的一个平面内, 即四组导线的坐标是  $(R_1, 0)$ ,  $(R_2, \pi + \delta_2)$ ,  $(R_3, \delta_3)$  和  $(R_4, \pi + \delta_4)$ . 在此情况下, 主线圈和反抵线圈中的感应电压将是

$$V_m = LN_m \omega \sum_n \frac{\bar{B}_n}{r_R^{n-1}} [R_1^n - (-1)^n R_2^n] \sin \left[ n\omega t + \varphi_n - \frac{(-1)^n n \delta_2 R_2^n}{R_1^n - (-1)^n R_2^n} \right] \quad (12)$$

$$V_n = LN_n \omega \sum_n \frac{\bar{B}_n}{r_R^{n-1}} [R_3^n - (-1)^n R_4^n] \sin \left[ n\omega t + \varphi_n + \frac{n(R_3^n \delta_3 - (-1)^n R_4^n \delta_4)}{R_3^n - (-1)^n R_4^n} \right] \quad (13)$$

在式(12,13)中只保留了  $\delta_2, \delta_3, \delta_4$  的一级项,忽略了这些小量的二级和更高级项.加工误差使得双线圈的输出中仍有  $n = N$  的分量.这时可以用分压电阻从感应电压较高的线圈中取出一部分电压与另一线圈反接,调节分压比,使得总输出电压中  $n = N$  (即角频率为  $N\omega$ ) 的分量最小,即可减弱主磁场 ( $n = N$ ) 对测量其他磁场分量的影响.设分压比为  $\mu$ ,则此情况下,双线圈的输出电压  $E$  为

$$E = \sum_n E_n = LN_m \omega \sum_n \frac{\bar{B}_n}{r_R^{n-1}} \left\{ \mu [R_1^n - (-1)^n R_2^n] - \frac{N_n}{N_m} [R_3^n - (-1)^n R_4^n] \right\} \sin(n\omega t + \varphi_n + \alpha_n) \quad (14)$$

上式也只保留了小量  $\delta_2, \delta_3, \delta_4$  的一级项.  $\alpha_n$  的表示式是

$$\tan \alpha_n \approx \alpha_n = n \left\{ \frac{-\mu(-1)^n R_2^n \delta_2 - \frac{N_n}{N_m} R_3^n \delta_3 + \frac{N_n}{N_m} (-1)^n R_4^n \delta_4}{\mu [R_1^n - (-1)^n R_2^n] - \frac{N_n}{N_m} [R_3^n - (-1)^n R_4^n]} \right\} \quad (15)$$

$\alpha_n$  是相角  $\varphi_n$  的测量误差.

双线圈输出电压的幅值  $E_{n,\max}$  正比于  $\bar{B}_n$  (见式(10,14))因此,

$$\bar{B}_n = \frac{E_{n,\max} r_R^{n-1}}{LN_m \omega \left\{ \mu [R_1^n - (-1)^n R_2^n] - \frac{N_n}{N_m} [R_3^n - (-1)^n R_4^n] \right\}} \quad (16)$$

主磁场  $\bar{B}_N$  是用主线圈测量的.从式(4)或(12)得到,

$$\bar{B}_N = \frac{V_{m,N,\max} r_R^{N-1}}{LN_m \omega [R_1^N - (-1)^N R_2^N]} \quad (17)$$

$V_{m,N,\max}$  是主线圈输出电压中角频率为  $N\omega$  的分量的幅值.从上述二式,即可求得多极分量的相对强度  $\frac{\bar{B}_n}{\bar{B}_N}$ ,它表述了多极磁体的磁场分布情况.

$$\frac{\bar{B}_n}{\bar{B}_N} = \frac{E_{n,\max}}{V_{m,N,\max}} \times \frac{[R_1^N - (-1)^N R_2^N] r_R^{n-N}}{\mu [R_1^n - (-1)^n R_2^n] - \frac{N_n}{N_m} [R_3^n - (-1)^n R_4^n]} = P \frac{E_{n,\max}}{V_{m,N,\max}} \quad (18)$$

比例系数  $P$  是  $R_1 \cdots R_4$  的函数,在处理测量数据时,是按  $R_1 \cdots R_4$  的设计值来计算  $P$  值的.测磁仪加工误差使得  $R_1 \cdots R_4$  偏离设计值,  $P$  值也发生变化,导致  $\frac{\bar{B}_n}{\bar{B}_N}$  值的误差.加工误差引起的测量数据误差是

$$\frac{\Delta\left(\frac{\overline{B}_n}{\overline{B}_N}\right)}{\frac{\overline{B}_n}{\overline{B}_N}} = \frac{\Delta P}{P} = \frac{N[R_1^{N-1}\Delta R_1 - (-1)^N R_2^{N-1}\Delta R_2]}{R_1^N - (-1)^N R_2^N} - \frac{\mu[R_1^{n-1}\Delta R_1 - (-1)^n R_2^{n-1}\Delta R_2] - \frac{N_a}{N_m}[R_3^{n-1}\Delta R_3 - (-1)^n R_4^{n-1}\Delta R_4]}{\mu[R_1^n - (-1)^n R_2^n] - \frac{N_a}{N_m}[R_3^n - (-1)^n R_4^n]} \quad (19)$$

式中  $\Delta R_1, \Delta R_2, \Delta R_3, \Delta R_4$  分别是  $R_1, R_2, R_3, R_4$  的加工误差. 以一个测磁仪为例, 进行计算, 以求得定量结果. 测磁仪的参数是:  $R_1 = 28\text{mm}, R_2 = 14\text{mm}, R_3 = 17.5\text{mm}, R_4 = 3.5\text{mm}, N_m = 120, N_a = 240, N = 2$ . 设  $\mu = 1$ , 对  $n = 3$ , 结果为

$$\frac{\Delta P}{P} = -0.074\Delta R_1 - 0.09\Delta R_2 + 0.132\Delta R_3 + 0.005\Delta R_4.$$

最不利情况下,  $-\Delta R_1 = -\Delta R_2 = \Delta R_3 = \Delta R_4 = d$ , 则

$$\frac{\Delta\left(\frac{\overline{B}_3}{\overline{B}_2}\right)}{\frac{\overline{B}_3}{\overline{B}_2}} = \frac{\Delta P}{P} = \frac{0.3d}{mm}$$

即使  $d = 0.1\text{mm}$ , 相对测量误差最多只有 0.03, 即  $3 \times 10^{-2}$ . 测量多极分量时, 要求的相对测量误差并不高. 一般加速器允许  $\frac{\overline{B}_n}{\overline{B}_N} \approx 3 - 4 \times 10^{-4}$ , 测量精度要求一般为  $1 \times 10^{-4}$ . 相对测量误差约为  $(25 \sim 30) \times 10^{-2}$ . 加工误差  $d \approx 0.1\text{mm}$ , 所引起的测量误差应该是可以允许的. 其他影响测量结果的因素如噪声、感应电压的取样、处理, 都会影响结果的精度.

### 3 磁中心位置的测定

有些加速器在建造过程中, 测量磁场中的二极分量, 以确定其磁中心位置. 在安装磁体时, 把各磁体的磁中心安放在中心轨道上, 以减小剩余闭轨畸变. 旋转测磁仪测得的二极分量包含有两部分, 一部分是多极磁体加工或装配误差引起的固有的二极磁场分量, 另一部分是由旋转测磁仪的安装误差所引起, 即测磁仪旋转中心与磁场分布中心不重合, 这一现象在四极磁体 ( $N = 2$ ) 中尤为显著<sup>[1,2]</sup>. 测量多极磁体时, 在测量结果中只显示有二极分量  $\overline{B}_1$  存在, 其空间分布为

$$B_1 = \overline{B}_1 e^{i(\theta + \theta'_1)} \quad (22)$$

$(r', \theta')$  是磁测仪以其旋转中心为中心的极坐标系, 它的原点在磁场分布坐标系  $(r, \theta)$  中, 可能位于  $(\Delta r, \Delta \theta)$ . 从测磁结果无从分辨二极分量中那部分是磁体所固有的. 但可以确定, 在  $(r', \theta')$  系统中磁中心的坐标  $r'_c$  和  $\theta'_c$  是

$$r'_c = \frac{\overline{B}_1}{B_2} r_R,$$

$$\theta'_c = \pi + \varphi'_1. \quad (24)$$

上式中  $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \varphi'_1$  都是旋测仪的测量结果.

旋转测磁的结果给出了在  $(r', \theta')$  坐标系里磁中心的位置  $(r'_c, \theta'_c)$ . 为了在安装磁体时能把磁中心安放在中心轨道上, 最直接有效的方法是在测磁现场用旋转测磁仪测量磁场分布之后, 就用准直测量设备测定该磁体安装准直用的靶标相对于测磁仪旋转中心的位置, 即安装靶标在  $(r', \theta')$  坐标系中的坐标  $(r'_i, \theta'_i)$ . 从  $(r'_i, \theta'_i)$  及测得的磁中心位置  $(r'_c, \theta'_c)$ , 就可以确定磁中心相对于安装准直靶标的位置, 以便把磁中心安放在中心轨道上.

有的旋转测磁仪在选择参数时, 除了让双线圈输出电压中主磁场感应讯号为零外 ( $E_n = 0$ ), 令  $n = 1$  的讯号也相互抵消为零 ( $E_1 = 0$ ), 这样, 二极磁场 ( $n = 1$ ) 就只能用主线圈来测量. 二极磁场在多极磁体中比主磁场要弱得多, 用主线圈来测量二极场, 会影响测量精度. 双线圈讯号中消除二极场的感应电压也是不必要的, 因为二极场和其他多极场一样都远小于主磁场, 相互干扰很小. 所以, 如果决定测定磁中心位置, 则选定旋转测磁仪参数时, 应使双线圈输出电压中, 二极场感应电压  $E_1$  有一定数值, 可以用双线圈测定二极磁场分量.

## 4 励磁曲线的测定

多极磁体的另一项重要参数是它的励磁曲线, 即在不同励磁电流下, 磁体轴线上的积分场梯度. 对四极磁体 ( $N = 2$ ) 要求测定,

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial B_2}{\partial r} dz = f(I) \quad (25)$$

六极磁体则要求测定,

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial^2 B_3}{\partial r^2} dz = f(I). \quad (26)$$

四极磁体的积分梯度由主线圈的角频率为  $2\omega$  的主分量来确定, 因为, 从式(7)得到

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial B_2}{\partial z} dz = L \frac{\bar{B}_2}{r_R} = \frac{V_{m,2,\max}}{N_m \omega (R_1^2 - R_2^2)}. \quad (27)$$

在一定的励磁电流  $I$  下, 测量主线圈输出电压中角频率为  $2\omega$  的分量的最大值  $V_{m,2,\max}$ , 利用上式便能得到四极磁体的积分场梯度. 计算时  $R_1$  和  $R_2$  只能采用设计值,  $R_1$  和  $R_2$  的加工误差将会给积分梯度数据带来误差, 设误差为  $\epsilon$ , 最大可能误差将是

$$\epsilon = \frac{2(R_1 \Delta R_1 - R_2 \Delta R_2)}{R_1^2 - R_2^2} \quad (28)$$

以前面讨论过的测磁仪为例, 设  $\Delta R_1 = -\Delta R_2 = d$ , 则

$$\epsilon = \frac{0.143d}{mm},$$

即使  $d = 0.02\text{mm}$ ,  $\epsilon = 2.9 \times 10^{-3}$

对六极磁体也可作类似的分析. 设旋转测磁仪主线圈输出电压中角频率为  $3\omega$  的主

分量的幅值是  $V_{m,3,\max}$ , 则六极磁体的积分场梯度为

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial^2 B_3}{\partial r^2} dz = 2L \frac{\bar{B}_3}{r_R^2} = \frac{2V_{m,3,\max}}{N_m \omega (R_1^3 + R_2^3)}, \quad (30)$$

旋转测磁仪加工误差  $\Delta R_1, \Delta R_2$  引起的积分梯度测量误差是

$$\epsilon = \frac{3(R_1^2 \Delta R_1 + R_2^2 \Delta R_2)}{R_1^3 + R_2^3}, \quad (31)$$

以一个测量六极磁体的测磁仪为例, 它的参数是  $R_1 = 28\text{mm}, R_2 = 16.8\text{mm}, N_m = 400$ . 假设  $\Delta R_1 = \Delta R_2 = d$ , 则

$$\epsilon = \frac{0.12d}{\text{mm}}, \quad (32)$$

即使  $d = 0.02\text{mm}$ , 误差也将是  $2.4 \times 10^{-3}$ . 此外, 还要考虑其他误差项的影响, 积分梯度测量的精度还要进一步降低.

对多匝测量线圈而言, 线圈有一定截面. 严格地说, 上面一些公式 (如式 (18), (27), (30) 等) 中的  $R_1, R_2, R_3$  和  $R_4$ , 不是线圈截面中点的坐标, 更不是线圈框架的尺寸. 对数百匝的测量线圈而言, 式 (4), (5), (7), (8) 是近似式, 实际上应为

$$V_{m,n} = L\omega \sum_n \bar{B}_n \frac{1}{r_R^{n-1}} \sum_{i=1}^{N_m} [\bar{r}_{1,i}^n - (-1)^n \bar{r}_{2,i}^n] \sin(n\omega t + \varphi_n + \delta_{m,n,i}), \quad (33)$$

$$V_{m,a} = L\omega \sum_n \bar{B}_n \frac{1}{r_R^{n-1}} \sum_{i=1}^{N_a} [\bar{r}_{3,i}^n - (-1)^n \bar{r}_{4,i}^n] \sin(n\omega t + \varphi_n + \delta_{a,n,i}), \quad (34)$$

上二式中

$$\bar{r}_{1,i} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} r_{1,i}(z) dz, \quad (35)$$

$$\bar{r}_{2,i} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} r_{2,i}(z) dz, \quad (36)$$

上式中  $r_{1,i}(z)$  和  $r_{2,i}(z)$  分别是第  $i$  匝主线圈的两根导线在  $z$  处的径向坐标.  $\bar{r}_{3,i}, \bar{r}_{4,i}$  也有类似的表示式. 多匝线圈有一定截面, 所有导线不可能都位于通过旋转中心的一个平面内, 因而各匝中所产生的感应电压有不同的相角,  $\delta_{m,n,i}$  或  $\delta_{a,n,i}$ , 如式 (33), (34) 中所示. 从以上分析可知, 式 (18), (27), (30) 中的  $R_1, R_2, R_3, R_4$  应为

$$\begin{aligned} R_{1,n} &= \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \bar{r}_{1,i}^n, & R_{2,n} &= \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \bar{r}_{2,i}^n, \\ &= \frac{1}{N_a} \sum_{i=1}^{N_a} \bar{r}_{3,i}^n, & R_{4,n} &= \frac{1}{N_a} \sum_{i=1}^{N_a} \bar{r}_{4,i}^n, \end{aligned}$$

对多匝线圈而言, 有关的

用旋转测磁仪测量批量生产的多极磁体的积分梯度的一致性时, 由于所有磁体用同

一台测磁仪来测量,只须测量相互间的差异,测磁仪的加工误差不影响这种相对测量的结果.旋转测磁仪是用来检测批量生产的多极磁体的一致性的有效设备.

#### 参考文献 (References)

- 1 XU Jian-Ming. HEP&NP, 1987, 11(2):238(in Chinese)  
(徐建铭. 高能物理与核物理, 1987, 11(2):238)
- 2 XU Jian-Ming. Nucl. Instr. and Meth., 1988, A265:533

## Study on the Performance of the Rotating Coil Magnetometer

XU Jian-Ming

(Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Science, Beijing 100039, China)

**Abstract** The dependence of the performance of the rotating coil magnetometer on its parameter and fabrication error is studied. The expressions of the measurement error due to the fabrication error are given. The results show that, the rotating coil magnetometer is an effective instrument to measure the field distribution of the multipole magnets, by measuring the dipole field the position of the magnetic center of the magnet relative to the rotating center of the magnetometer can be determined, and the magnetization curve of the magnets can be measured by it also but the measurement accuracy is limited by its fabrication error.

**Key words** rotating coil magnetometer, measuring accuracy, magnet center, magnetization curve.