第 27 卷 第 1 期 高 能 物 理 与 核 物 理 Vol.27, No.1
2003 年 1 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jan., 2003

几类宏观量子态的内部结构及其压缩特性*

梁麦林[1)] 李玉蓉
(天津大学理学院应用物理系 天津 300072)

摘要 谐振子,变形振子,非简谐振子以及变形非简谐振子湮没算符高次幂的正交归一本征态都具有奇偶结构形式. 正是由于这种结构特点决定了它们振幅的高次幂压缩性质.

关键词 宏观量子态 奇偶结构 压缩

1 引言

近来的研究表明,量子代数[1—3]在物理的许多方面有潜在的应用价值[4—9],例如原子核物理[4,5],量子光学[6,7]等. 关于 q 变形振子奇偶相干态以及 q 变形非简谐振子广义奇偶相干态的高次幂压缩性质[10,11],文献中已有研究[12,13]. 有意思的是变形奇偶相干态的高次幂压缩行为[12,13]与一般的非形变奇偶相干态的相似[14]. 不仅如此,双参数形变振子湮没算符高次幂本征态的压缩行为[9]也与未变形振子[15]以及未变形非简谐振子[16]的情形类似. 这促使我们去探索这些态的共同内部结构. 仔细的考察发现,各类振子湮没算符高次幂的本征态都具有共同的内部结构(第 2 节中将给出具体形式). 正是由于这种共同的内部结构,才决定了它们具有共同的压缩特点.

2 宏观量子态的内部结构

由于相干态,奇偶相干态以及湮没算符高次幂的本征态既是宏观的又是量子的,所以又称为宏观量子态. 为了简洁,本文中将各类振子湮没算符高次幂的本征态统称为宏观量子态.

设 a, a^+ 是双参数变形振子(又称 qs 变形振子)的湮没和产生算符,则它们满足以下关系[9]

$$aa^+ - s^{-1}qa^+a = (sq)^{-\hat{N}}, \tag{1a}$$

$$[\hat{N}, a] = -a, [\hat{N}, a^+] = a^+$$

其中 q, s 是变形参数, $\hat{N}$ 代表数算符. 数算符,产生和湮没算符作用于 qs 变形 Fock 态 $|n\rangle$ 上有以下结果

$$a|n\rangle = \sqrt{[n]}|n-1\rangle,$$
$$a^+|n\rangle = \sqrt{[n+1]}|n+1\rangle,$$
$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle,$$

上式中 n 是整数. 符号 $[n]$ 的定义如下:

$$[n] = s^{1-n}(q^n - q^{-n})/(q - q^{-1}).$$

当 $s=1$ 时, qs 变形振子回到 q 变形振子. 如果 $q=s=1$,则 qs 变形振子退化为普通谐振子. 湮没算符 N 次幂 a^N 的正交归一本征态为[9]

$$|\Psi_j(\alpha)\rangle_N = C_j^{(N)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{nN+j}}{\sqrt{[nN+j]!}} |nN+j\rangle, \tag{4}$$

其中 $[m]! = [m][m-1][m-2]\cdots[2][1]$ 是 q 变形阶乘. 定义 $x = |\alpha|^2$,归一化系数为

$$C_j^{(N)} = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{nN+j}}{[nN+j]!}\right]^{1/2}}.$$

用产生和湮没算符定义两个厄密算符

$$X = \frac{1}{2}(a^k + a^{+k}), Y = \frac{1}{2i}(a^k - a^{+k}), \tag{6}$$

两者之间有对易关系

$$[X, Y] = \frac{1}{2i}[a^k, a^{+k}], \tag{7}$$

进而有测不准关系

2002-04-12 收稿
* 国家自然科学基金(20176035)资助
1) E-mail: mailinliang@eyou.com

$$\langle(\Delta X)^2\rangle\langle(\Delta Y)^2\rangle \geqslant \left(\frac{1}{4}\langle[a^k,a^{+k}]\rangle\right)^2. \quad (8)$$

如果

$$\Delta x \equiv \langle(\Delta X)^2\rangle - \frac{1}{4}\langle[a^k,a^{+k}]\rangle < 0, \quad (9)$$

则称 X 分量有压缩;反之,如果

$$\Delta y \equiv \langle(\Delta Y)^2\rangle - \frac{1}{4}\langle[a^k,a^{+k}]\rangle < 0, \quad (10)$$

则称 Y 分量有压缩. 当 $k=1,2$ 时,式(9),(10)中定义的压缩退化为普通压缩和振幅平方压缩[10]. 研究表明[9],本征态(4)具有这样的压缩性质:当 N 是齐数时不存在压缩;当 N 为偶数时,有压缩的幂次为 $k=(2p+1)N/2$,其中 p 是整数,$p=0,1,2,3,\cdots$ 当 $N=2$ 时,态(4)式是 a^2 的本征态即 qs 变形的奇偶相干态,而 q 变形的奇偶相干态以及未变形的奇偶相干态都是其特例. 各类奇偶相干态的压缩幂次为 $k=(2p+1)$.

为什么只有当 N 为偶数时才会有压缩呢,原来当 N 为偶数时,可令 $N=2M$,a^N 的本征态能够用 a^M 的本征态表示成如下形式:

$$|\psi_l(\alpha)\rangle_{2M} = \left(\frac{C_l^{(2M)}}{2C_l^{(M)}}\right)[|\psi_l(\alpha)\rangle_M + e^{-i\frac{l\pi}{M}}|\psi_l(e^{i\frac{\pi}{M}}\alpha)\rangle_M], \quad (11a)$$

$$|\psi_{l+M}(\alpha)\rangle_{2M} = \left(\frac{C_{l+M}^{(2M)}}{2C_l^{(M)}}\right)[|\psi_l(\alpha)\rangle_M - e^{-i\frac{l\pi}{M}}|\psi_l(e^{i\frac{\pi}{M}}\alpha)\rangle_M], \quad (11b)$$

这里 $l=0,1,2,\cdots,M-1$. 显然,具有这种结构的本征态的个数必为偶数. 所以当 N 为齐数时,湮没算符 N 次幂的正交归一本征态没有这种结构. 当 $N=2$ 时,$M=1$,$l=0$,式(11a,b)给出的是奇偶相干态

$$|\psi_0(\alpha)\rangle_2 = \left(\frac{C_0^{(2)}}{2C_0^{(1)}}\right)[|\psi_0(\alpha)\rangle_1 + |\psi_0(-\alpha)\rangle_1], \quad (12a)$$

$$|\psi_1(\alpha)\rangle_2 = \left(\frac{C_1^{(2)}}{2C_0^{(1)}}\right)[|\psi_0(\alpha)\rangle_1 + |\psi_0(-\alpha)\rangle_1], \quad (12b)$$

其中 $|\psi_0(\alpha)\rangle_1=|\alpha\rangle$ 是相干态. 下一节将说明具有式(11a,b)结构的态有压缩特点 $k=(2p+1)N/2$. 现在我们指出非简谐振子湮没算符高次幂的正交归一本征态也具有式(11a,b)的结构.

首先回顾一下非简谐振子的有关情况. 非简谐振子的哈密顿算符为[16]

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{A}{x^2},\ A>0, \quad (13)$$

升降算符的定义为

$$b_{\pm} = \frac{1}{2}(Q \mp iP), \quad (14)$$

其中

$$Q = x^2 - H,\ P \quad \frac{1}{2i}\left(x\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}x\right) \quad (15)$$

叫做自然坐标算符和动量算符. 设 $|n\rangle$ 代表哈密顿 H 的第 n 个能量本征态,则有以下关系

$$H|n\rangle = 2(n+k)|n\rangle,\ b_-|n\rangle = \sqrt{n(n+2k-1)}|n-1\rangle,$$

$$b_+|n\rangle = \sqrt{(n+1)(n+2k)}|n+1\rangle, \quad (16)$$

式中 $k=(1-\sqrt{A+1/4})/2$ 是一纯常数. 湮没算符高次幂 b_-^N 的正交归一本征态为[16]

$$|\psi_j(\alpha)\rangle_N = C_j^{(N)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{nN+j}}{\sqrt{(nN+j)!(2k)_{nN+j}}}|nN+j\rangle, \quad (17)$$

其中 $j=0,1,2,\cdots,N-1$. 本征态的个数共有 N 个. 利用定义 $x=|\alpha|^2$,归一化系数为

$$C_j^{(N)} = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{nN+j}}{(nN+j)!(2k)_{nN+j}}\right]^{1/2}}. \quad (18)$$

在式(17),(18)中,$(2k)_n=(2k)(2k+1)\cdots(2k+n-1)$. 直接的运算可以验证,本征态(17)式也具有式(11a,b)的结构特点.

对于 q 变形的非简谐振子,文献[13]中定义了广义奇偶相干态. 一般情况下,湮没算符高次幂 b_-^N 的正交归一本征态也容易利用式(16)—(18)获得. 实际上,将式(16)—(18)的普通括号换成 q 变形括号

$$(n) \to [n] = \frac{Q^n - 1}{Q - 1}, \quad (19)$$

式(19)中,Q 代表变形非简谐振子的变形参数[17],态(17)就成了 q 变形非简谐振子湮没算符高次幂 b_-^N 的正交归一本征态

$$|\psi_j(\alpha)\rangle_N = C_j^{(N)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{nN+j}}{\sqrt{[nN+j]![2k]_{nN+j}}}|nN+j\rangle, \quad (20)$$

其中的阶乘仍是前文中提到的 q 变形阶乘,而 $[2k]_n=[2k][2k+1]\cdots[2k+n-1]$. 当 $N=2$ 时,态(20)式成为 q 变形的广义奇偶相干态[13]. 直接运算可以验证有关结论. 当 N 为偶数时,仍然有关系式(11a,b).

3 量子性质

定义

$$A = a^M, b_-^M, \rho_l = C_l^{(2M)}/C_{l+2M}^{(2M)}, z = \alpha^M. \quad (21)$$

即 A 是任意一个湮没算符的 M 次幂. 在算符 A 的作用下

$$A|\psi_l(\alpha)\rangle_{2M} = z\rho_l|\psi_{l+M}(\alpha)\rangle_{2M}, \quad (22a)$$

$$A|\psi_{l+M}(\alpha)\rangle_{2M} = z\frac{1}{\rho_l}|\psi_l(\alpha)\rangle_{2M}, \quad (22b)$$

显而易见

$$A^2|\psi_l(\alpha)\rangle_{2M} = z^2|\psi_l(\alpha)\rangle_{2M}, A^2|\psi_{l+M}(\alpha)\rangle_{2M} = z^2|\psi_{l+M}(\alpha)\rangle_{2M}, \quad (23)$$

因而,对于算符 A 而言,态 $|\psi_l(\alpha)\rangle_{2M}$ 和 $|\psi_{l+M}(\alpha)\rangle$ 构成了一对广义上的奇偶相干态. 将式(6)中的 k 写作 $k = mM$,则有

$$X = \frac{1}{2}(A^m + A^{+m}),\ Y = \frac{1}{2i}(A^m - A^{+m}). \quad (24)$$

压缩条件(9),(10)式同时变成

$$\Delta x \equiv \langle(\Delta X)^2\rangle - \frac{1}{4}\langle[A^m, A^{+m}]\rangle < 0, \quad (25a)$$

或者

$$\Delta y \equiv \langle(\Delta Y)^2\rangle - \frac{1}{4}\langle[A^m, A^{+m}]\rangle < 0. \quad (25b)$$

利用式(22a,b)及式(23),由文献[13,14]中的结论,马上知道有压缩的幂次只能是 m 是奇数即 $m = 2p+1, k = mM = (2p+1)N/2$. 具体运算后,得到 Δx 和 Δy 的如下结果. 对于态 $|\psi_l(\alpha)\rangle_{2M}$

$$\Delta x = \frac{x^k}{2}[\rho_l^2 + \cos 2k\theta], \quad (26a)$$

$$\Delta y = \frac{x^k}{2}[\rho_l^2 - \cos 2k\theta], \quad (26b)$$

其中 θ 是 α 的相位. 对于态 $|\psi_{l+M}(\alpha)\rangle_{2M}$

$$\Delta x = \frac{x^k}{2}[1/\rho_l^2 + \cos 2k\theta], \quad (27a)$$

$$\Delta y = \frac{x^k}{2}[1/\rho_l^2 - \cos 2k\theta]. \quad (27b)$$

如果 $\rho_l < 1$,态 $|\psi_l(\alpha)\rangle_{2M}$ 可有压缩,反之,态 $|\psi_{l+M}(\alpha)\rangle_{2M}$ 有压缩. 从以上的论述可以看到,N 为偶数的态有压缩与这些态可以表示成偶奇结构有关. 而 N 为齐数的态不可能有这样的结构,所以没有压缩. 由此看来有无偶奇结构是湮没算符高次幂正交归一本征态(4)式及(17)式有无压缩的关键. 具体哪个态有压缩,由(21)式中定义的参量 ρ_l 决定. 利用不同情况的归一化系数(5),(18)式,ρ_l 可算出. 接下来看几个例子.

对于奇偶相干态,$N=2, M=1, l=0$. 简谐振子的情况 $q=s=1$,归一化系数(5)给出

$$C_0^{(2)} = (\cosh x)^{-1/2}, C_1^{(2)} = (\sinh x)^{-1/2},$$

所以

$$\rho_0 = C_0^{(2)}/C_1^{(2)} = (\tanh x)^{-1/2} < 1. \quad (28)$$

从式(26),(27)看,只有态 $|\Psi_0^{(2)}(\alpha)\rangle$ 即偶相干态可能有压缩. 对于 q 变形振子[12],式(28)中的双曲正切函数变成 q 变形的双曲正切函数,参数 ρ_0 可以小于一,也可以大于一,因而 q 变形的奇偶相干态都可以有压缩.

再来看另一种状态 $N=4, M=2, l=0,1$. 对于简谐振子情况,归一化系数由式(5)给出

$$\begin{aligned} C_0^{(4)} &= \left[\frac{1}{2}(\cosh x + \cos x)\right]^{-1/2}, \\ C_1^{(4)} &= \left[\frac{1}{2}(\sinh x + \sin x)\right]^{-1/2} \\ C_2^{(4)} &= \left[\frac{1}{2}(\cosh x - \cos x)\right]^{-1/2}, \\ C_3^{(4)} &= \left[\frac{1}{2}(\sinh x - \sin x)\right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (29)$$

进一步得到

$$\rho_0 = C_0^{(4)}/C_2^{(4)} = \left(\frac{\cosh x - \cos x}{\cosh x + \cos x}\right)^{1/2}, \quad (30a)$$

$$\rho_1 = C_1^{(4)}/C_3^{(4)} = \left(\frac{\sinh x - \sin x}{\sinh x + \sin x}\right)^{1/2}, \quad (30b)$$

式(30a,b)都是周期性变化的. 由式(11a,b)定义的各态都可以有压缩.

4 结束语

以上分析了各种场湮没算符高次幂正交归一本征态的内部结构与其压缩特点的关系. 正是由于这些态的内部奇偶结构形式决定了这些态的压缩性质. 这样的研究对更深入理解这些态的性质有较大帮助. 进一步的考察发现,本文的结论可以推广到其他的李代数,例如 $SU(1,1)$ 李代数等.

参考文献(References)

1 Biedenharm L C.J Phys., 1989, **A22**: L872

2 Pocek M. Phys. Lett., 1991, **B255**: 554

3 HAO San-Ru. Acta Physica Sinica, 1993, **42**: 1057 (in Chinese)
(郝三如. 物理学报, 1993, **42**: 1057)

4 FANG Xiang-Zheng, RUAN Tu-Nan. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2001, **25**: 212(in Chinese)
(方向正, 阮图南. 高能物理与核物理, 2001, **25**: 212)

5 Greenberg O W, Hilborn. Phys. Rev. Lett., 1999, **83**: 4460

6 KUANG L M, WANG F B. Phys. Lett., 1992, **A169**: 225

7 WANG F B, KUANG L M.J. Phys., 1993, **A26**: 293

8 CHEN Chang-Yuan. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2001, **25**: 193(in Chinese)
(陈昌远, 刘友文. 高能物理与核物理, 2001, **25**: 193)

9 WANG Ji-Suo, SUN Chang-Yong, TENG Ai-Ping. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1997, **21**: 793(in Chinese)
(王继锁, 孙长勇, 腾爱萍. 高能物理与核物理, 1997, **21**: 793)

10 Hillery M. Phys. Rev. 1987, **A36**: 3796

11 ZHANG Z, XU L, CHAI J et al. Phys. Lett. 1990, **A150**: 27

12 WANG Zhong-Qing. Acta Physica Sinica, 2001, **50**: 690 (in Chinese)
(汪仲清. 物理学报, 2001, **50**: 690)

13 WANG Ji-Suo, LIU Tang-Kun, ZHAN Ming-Sheng. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2001, **25**: 11(in Chinese)
(王继锁, 刘堂昆, 詹明生. 高能物理与核物理, 2001, **25**: 11)

14 SUN Jin-Zuo. Chinese Journal of Quantum Electronics, 1992, **9**: 397 (in Chinese)
(孙金祚. 量子电子学, 1992, **9**: 397)

15 WANG Ji-Suo, SUN Jin-Zuo, WANG Chuan-Kui. Acta Photonica Sinica, 1994, **23**: 200(in Chinese)
(王继锁, 孙金祚, 王传奎. 光子学报, 1994, **23**: 200)

16 WANG Ji-Suo, LIU Tang-Kun, ZHAN Ming-Sheng. Acta Optonica Sinica, 2000, **20**: 1317 (in Chinese)
(王继锁, 刘堂昆, 詹明生. 光学学报, 2000, **20**: 1317)

17 XU Zi-Wen. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**: 436(in Chinese)
(徐子文. 高能物理与核物理, 1999, **23**: 436)

Internal Structure and Squeezing Properties of Some Macroscopic Quantum States

LIANG Mai-Lin[1)]　LI Yu-Rong

(Department of Applied Physics, School of Science, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract Coherent states and the extension to the even and odd coherent states, and further to the eigenstates of the higher power of the annihilation operator are basic and important macroscopic quantum states in quantum field theory. Recently, these investigations have been extended to the aharmonic oscillator and the quantum algebra with q-deformed or qs-deformed commutation relations. In this paper, the orthogonal eigenstates of the higher order of the annihilation operator of the q-deformed aharmonic oscillator are also derived. It is pointed out that these different macroscopic quantum states have similar squeezing properties of higher order amplitude. The reason is found that the orthogonal eigenstates of the higher order of the annihilation operator of the harmonic oscillator, the q-deformed oscillator, the qs-deformed oscillator, the anharmonic oscillator and the q-deformed anharmonic oscillator all have even and odd structure, which is similar to the simple even and odd coherent states. For other systems like the system with $SU(1,1)$ Lie algebra or q-deformed quantum algebra also have such properties.

Key words macroscopic quantum state, even and odd structure, squeezing

Received 12 April 2002

* Supported by National Natural Science Foundation of China (20176035)

1) E-mail: mailinliang@eyou.com