第27卷 第10期 高能物理与核物理 Vol.27, No.10
2003年10月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Oct., 2003

Abel Chern-Simons项与复标量场耦合系统的正则量子化*

隆正文[1;1)] 刘波[2] 李子平[2;2)]

1(贵州大学物理系 贵阳 550025)

2(北京工业大学数理学院 北京 100022)

摘要 应用Faddeev-Jackiw方法对Abel Chern-Simons项与复标量场耦合系统进行正则量子化,它表明用这种方法进行量子化更加直接和优美.

关键词 Faddeev-Jackiw方法 Chern-Simons理论 约束系统

1 引言

Faddeev-Jackiw(FJ)方法最初起源于对于一阶拉氏量系统的研究(此处一阶拉氏量系统是指系统的拉氏量中只含广义速度的一次幂,而不含高次幂). 在二维自对偶场的特殊情况下,Floreanini和Jackiw提出了一种定义在位形空间中的括号[1],用这种括号进行正则量子化. 随后Faddeev和Jackiw阐述了这样做的理由,较完整地论述了FJ方法. 此种方法的特点是简单、计算量少、不需区分第一类约束和第二类约束、也无需区分初级约束与次级约束、几何意义明显,同时也不需引入强等与弱等之分. 自提出以来,已被用于许多系统的量子化,如自对偶场[2]、电磁场[3]、Yang-Mills场[3]、超对称[4,5]、超引力[6]、非线性σ模型[7]、以及其他一些系统[8,9]等许多重要的物理系统中.

分数自旋与统计性质是(2+1)维时空中的特有特征,产生它们的元激发称为任意子[10]. 在任意子的场论研究中,Abel Chern-Simons(CS)项与物质场最小耦合的系统经常被作为基本系统[11]. 此系统呈现出分数自旋与分数统计性质,对解释分数量子效应[12]以及高温超导[13]有重要意义. 这里我们研究Abel CS项与复标量场耦合系统的FJ正则量子化.

2 场的FJ方法

有限自由度体系的FJ方法,Faddeev和Jackiw较完整地论述了(1988)[14],这里简要地叙述一下场的FJ方法

设场的拉氏量密度函数为

$$L = a_i(\phi)\dot{\phi}_i - V(\phi),\ (i = 1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

其中$\phi_i = \phi_i(x) = \phi_i(t,\boldsymbol{x})$为场量,当从有限自由度系统过渡到场时,拉氏量应该换成拉氏量密度. 因此,场的辛矩阵$f_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$为

$$f_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\delta a_j(\boldsymbol{y})}{\delta\phi_i(\boldsymbol{x})} - \frac{\delta a_i(\boldsymbol{x})}{\delta\phi_j(\boldsymbol{y})}, \tag{2}$$

其中$\phi_i(t,\boldsymbol{x})$代表任一属于辛变量集的场量. 由于在用辛矩阵$f_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$的逆进行FJ正则量子化时,需求的是等时对易关系式,在(2)式中没有明确写出各量对时间的依赖关系.

当求因辛矩阵奇异所导致的约束时[15-17],因辛势换成了辛势密度,需对辛势密度积分,即

$$\Omega_\alpha^{(0)} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}(\gamma_\alpha^{(0)}(t,\boldsymbol{x}))^T \frac{\delta}{\delta\phi(t,\boldsymbol{x})}\int \mathrm{d}\boldsymbol{y}V(t,\boldsymbol{y}) = 0,$$
$$(\alpha = 1,2,\cdots,m). \tag{3}$$

2003-02-25 收稿

* 国家自然科学基金(10247009)和贵州省自然科学基金(20013024)资助

1) E-mail: longshc@hotmail.com

2) E-mail: zpli@solaris.bjpu.edu.cn

866—869

场的 FJ 方法的其他步骤与有限自由度体系相同.

3　Abel Chern-Simons 项与复标量场耦合系统的正则量子化

(2+1)维时空中复标量场与 Abel CS 项与复标量场耦合系统的拉氏量密度为[18]

$$= (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\,\partial_\nu A_\lambda, \tag{4}$$

其中 $D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}A_\mu$，$\varepsilon^{012} = 1$，$(\mu,\nu = 0,1,2)$. 时空度规取 $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1)$. 在规范变换

$$\phi(x) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda(x)}\phi(x),\ A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x) \tag{5}$$

下，系统的作用量不变.

现在对此系统进行 FJ 正则量子化. 系统的拉氏量密度中与 $A_\mu(x)$ 相应的项已是一阶形式，但 $(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi)$ 项需降为一阶形式. 通过引入与 ϕ 和 ϕ^* 相应的正则动量作为辅助场达到此目的.

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = (D_0\phi)^* \tag{6}$$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial\dot\phi^*} = D^0\phi, \tag{7}$$

于是有

$$\pi\dot\phi + \pi^*\dot\phi^* - L = \pi\pi^* - (D_i\phi)^*(D^i\phi) + A_0J_0 - \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}A_0\,\partial_i A_j + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_i\dot A_j, \tag{8}$$

其中 $J_0 = \mathrm{i}(\pi\phi - \phi^*\pi^*)$ 为复标量场的电荷密度. 由(8)式，可把系统的拉氏量密度写成一阶形式

$$L = \pi\dot\phi + \pi^*\dot\phi^* + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j\dot A_i - V, \tag{9}$$

其中 V 为辛势

$$V = \pi\pi^* - (D_i\phi)^*(D^i\phi) + A_0J_0 - \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}A_0\,\partial_i A_j. \tag{10}$$

取辛变量集为

$$\xi = \{\phi,\phi^*,A_0,A_i,\pi,\pi^*\}, \tag{11}$$

从(9)式得出与 ξ^i 相应的各正则 1 形式的分量为

$$\begin{aligned} &a_\phi = \quad a_{\phi^*} = \\ &a_{A_0} \quad a_{A_i} \quad \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j, \\ &a_\pi = \quad a_{\pi^*} \end{aligned} \tag{12}$$

由(12)式求出辛矩阵 $f^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 为

$$f^{(0)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{13}$$

显然 $f^{(0)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 是奇异的，其零模为

$$\gamma^{(0)} = (0\ \ 0\ \ \gamma^{A_0}\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T \tag{14}$$

其中 γ^{A_0} 是任意函数. 代入(3)式

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}(\gamma_\alpha^{(0)}(t,\boldsymbol{x}))^T\frac{\delta}{\delta\xi(t,\boldsymbol{x})}\int\mathrm{d}\boldsymbol{y}V(t,\boldsymbol{y}) = 0, \tag{15}$$

即

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{x}\gamma^{A_0}\left[J_0 - \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\,\partial_i A_j\right] = 0. \tag{16}$$

因 γ^{A_0} 是一任意函数，于是得出 FJ 方法的第 0 级约束为

$$\Omega = J_0 - \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\,\partial_i A_j = 0. \tag{17}$$

按照辛算法，将约束 Ω 乘以拉氏乘子 $\dot\lambda$ 以后加到(9)式的正则形式部分，同时令 V 中 Ω 强等于零，得第一次迭代后的拉氏量密度为

$$L^{(1)} = \pi\dot\phi + \pi^*\dot\phi^* + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j\dot A_i + \left(\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\,\partial_i A_j - J_0\right)\dot\lambda - V^{(1)}, \tag{18}$$

其中

$$V^{(1)}\quad V|_{\Omega=0} = \pi\pi^* - (D_i\phi)^*(D^i\phi). \tag{19}$$

注意到 $L^{(1)}$ 中 A_0 已消失，所以第一次迭代后的辛变量集应取为

$$\xi^{(1)}\quad\{\phi,\phi^*,A_i,\pi,\pi^*,\lambda\}, \tag{20}$$

相应的正则 1 形式的分量为

$$\begin{aligned} &a_\phi^{(1)} = \pi,\ a_{\phi^*}^{(1)} = \pi^*,\ a_{A_i}^{(1)} = \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j, \\ &a_\pi^{(1)} = 0,\ a_{\pi^*}^{(1)} = 0,\ a_\lambda^{(1)} = \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\,\partial_i A_j - J_0. \end{aligned} \tag{21}$$

由此得到第一次迭代的辛矩阵 $f^{(1)}(x,y)$ 为

$$f^{(1)}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\mathrm{i}\pi(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \mathrm{i}\pi^*(x) \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij} & 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_j^x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i}\phi(x) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}\phi^*(x) \\ \mathrm{i}\pi(y) & -\mathrm{i}\pi^*(y) & -\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ji}\partial_i^x & \mathrm{i}\phi(y) & -\mathrm{i}\phi^*(y) & 0 \end{pmatrix}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{22}$$

$f^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$仍为奇异．由于系统具有规范对称性，由$f^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$的零模求出 FJ 方法中的第 1 级约束恒等于零[15]．此时，必须选取规范条件以继续辛算法．取库仑规范：

$$\partial_i A_i = 0, \tag{23}$$

并引入拉氏乘子 $\dot{\eta}$，得第二次迭代后的拉氏量密度为

$$L^{(2)} = \pi\dot{\phi} + \pi^*\dot{\phi}^* + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j\dot{A}_i + \left(\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j - J_0\right)\dot{\lambda} + (\partial_i A_i)\dot{\eta} - V^{(2)} \tag{24}$$

其中

$$V^{(2)} = V^{(1)}\big|_{\partial_i A_i = 0} = \pi\pi^* - (D_i\phi)^*(D^i\phi). \tag{25}$$

第二次迭代后的辛变量集为

$$\xi^{(2)} = \{\phi,\phi^*,A_i,\pi,\pi^*,\lambda,\eta\}, \tag{26}$$

相应的正则 1 形式的分量为

$$a_\phi^{(2)} = \pi,\ a_{\phi^*}^{(2)} = \pi^*,\ a_{A_i}^{(2)} = \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j,$$

$$a_\pi^{(2)} = 0,\ a_{\pi^*}^{(2)} = 0,\ a_\lambda^{(2)} = \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j - J_0,$$

$$a_\eta^{(2)} = \partial_i A_i. \tag{27}$$

由此可得辛矩阵$f^{(2)}(x,y)$为

$$f^{(2)}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\mathrm{i}\pi(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \mathrm{i}\pi^*(x) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij} & 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ij}\partial_j^x & \partial_i^x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i}\phi(x) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}\phi^*(x) & 0 \\ \mathrm{i}\pi(y) & -\mathrm{i}\pi^*(y) & -\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{ji}\partial_i^x & \mathrm{i}\phi(y) & -\mathrm{i}\phi^*(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{28}$$

由于$f^{(2)}(x,y)$的元素含有场量及微商，其逆矩阵不能用通常的逆矩阵公式计算，为此，利用逆矩阵的原始定义

$$\int f_{ij}^{(2)}(x,y)f_{jk}^{(2)-1}(y,z)\mathrm{d}^2 y = \delta_{ik}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) \tag{29}$$

将(28)式代入(29)式后，(29)式变成 7 个方程组，每一个方程组又由 7 个微分方程组成，这样通过解这 7 个微分方程组，最终可求出$f^{(2)^{-1}}(y,z)$的各元素．这里给出由此求出的几个广义括号如下

$$\{\phi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{y})\}_* = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

$$\{\phi^*(t,\boldsymbol{x}),\pi^*(t,\boldsymbol{y})\}_* = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

$$\{\phi(t,\boldsymbol{x}),A_i(t,\boldsymbol{y})\}_* = -\mathrm{i}\frac{2\pi}{k}\phi(t,\boldsymbol{x})\varepsilon_{ij}\partial_x^j\frac{1}{\nabla^2}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

$$\{\phi^*(t,\boldsymbol{x}),A_i(t,\boldsymbol{y})\}_* = \mathrm{i}\frac{2\pi}{k}\phi^*(t,\boldsymbol{x})\varepsilon_{ij}\partial_x^j\frac{1}{\nabla^2}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

$$\{\pi(t,\boldsymbol{x}),A_i(t,\boldsymbol{y})\}_* = \mathrm{i}\frac{2\pi}{k}\pi(t,\boldsymbol{x})\varepsilon_{ij}\partial_x^j\frac{1}{\nabla^2}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

$$\{\pi^*(t,\boldsymbol{x}),A_i(t,\boldsymbol{y})\}_* = -\mathrm{i}\frac{2\pi}{k}\pi^*(t,\boldsymbol{x})\varepsilon_{ij}\partial_x^j\frac{1}{\nabla^2}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{30}$$

其中算子$\frac{1}{\nabla^2}$的意义借助于被作用的量的 Fourier 展开来确定

$$\frac{1}{\nabla^2}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = -\int\mathrm{d}^2 k\,\frac{1}{k^2}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}. \tag{31}$$

比较(30)式与文献[18]Dirac 方法得到的对易式，可以看出，两者的结果是完全一致的．这表明 FJ 方法对此系统是适用的，但用 FJ 方法更加直接．

参考文献(References)

1 Floreanini R, Jackiw R. Phys. Rev. Lett., 1987, **59**:1873

2 Kulshreshtha D S, Muller-Kirsten H J. Phys. Rev., 1992, **D45**:R393

3 Barcelos-Neto J, Wotzasek C. Int. J. Mod. Phys., 1992, **A7**:4981

4 Barcelos-Neto J, Cheb-Terrab E S. Z. Phys., 1992, **C45**:133

5 Kulshreshtha D S, Muller-Kirsten H J W. Phys. Rev., 1991, **D43**:3376

6 Foussats A et al. Int. J. Theor. Phys., 1997, **36**:55

7 Foussats A et al. Int. J. Theor. Phys., 1997, **36**:2923

8 Wotzasek C. Phys. Rev., 1992, **D46**:2734

9 Barcelos-Neto J, Braga N R F. J. Math. Phys., 1994, **35**:3497

10 Wilczek F. Phys. Rev. Lett., 1982, **49**:957

11 JIANG J H, LI Z P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**(8):784 (in Chinese); LI Z P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1997, **21**(1):34 (in Chinese)
(江金环,李子平. 高能物理与核物理, 1999, **23**(8):784;李子平. 高能物理与核物理, 1997, **21**(1):34)

12 Haiperin B. Phys. Rev. Lett., 1984, **52**:1583

13 Laughlin R B. Science, 1988, **242**:525; Phys. Rev. Lett., 1988, **60**:2677

14 Faddeev L, Jackiw R. Phys. Rev. Lett., 1988, **60**:1692

15 Barcelos-Neto J, Wotzasek C. Mod. Phys. Lett., 1992, **A7**:1737

16 Barcelos-Neto J, Wotzasek C. Int. J. Mod. Phys., 1992, **A7**:4981

17 Montani H, Wotzasek C. Mod. Phys. Lett., 1993, **A8**:3387

18 Kim J K et al. J. Phys., 1994, **A27**:6067

Canonical Quantization of the Complex Scalar Field Coupled to the Abel Chern-Simons Term*

LONG Zheng-Wen[1;1)]　LIU Bo[2]　LI Zi-Ping[2;2)]

1(Department of Physics, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

2(College of Mathematics and Physics, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022, China)

Abstract　The Faddeev-Jackiw quantization method is applied to the complex scalar field coupled to the Abel Chern-Simons term, the results agree with the results obtained by using Dirac method. It is shown that this method is quite straightforward and elegant for this system.

Key words　Faddeev-Jackiw method, Chern-Simons theories, constrained systems

Received 25 February 2003

* Supported by National Natural Science Foundation of China (10247009) and Foundation of Guizhou Natural Science (20013024)

1) E-mail: longshc@hotmail.com

2) E-mail: zpli@solaris.bjpu.edu.cn