

q 变形非简谐振子湮没算符高次幂本征态的反聚束特性

汪仲清

(重庆邮电学院光电工程学院 重庆 400065)

摘要 研究了 q 变形非简谐振子湮没算符高次幂本征态的反聚束特性,并用数值计算方法定量研究了变形参量 q 对这一特性的影响.结果表明, q 变形非简谐振子湮没算符高次幂本征态在非谐振子强度 $x = |\beta|^2$ 的若干取值区间内可多次交替地呈现反聚束效应,并且变形参量 q 对这一效应有很大的影响.

关键词 q 变形 非谐振子 湮没算符高次幂的本征态 反聚束效应

1 引言

1926 年 Schrödinger^[1] 首先引入了相干态的概念, Glauber^[2] 于 1963 年对谐振子相干态进行了系统研究, 1979 年 Nieto 等^[3] 把相干态的概念推广到其他势场中. 目前, 相干态理论及其应用研究已成为物理学研究的一个重要领域. 近年来, 李群和李代数的量子变形引起了人们的普遍兴趣, 1989 年 Biedenharn^[4] 将相干态推广到 q 变形的情况, 提出了 q 相干态的概念, Gray 等^[5] 利用 q 微积分的性质证明了这种 q 相干态也是完备的. 随着人们对李群和李代数量子变形研究的不断深入, 作为物理理论中基本模型之一的简谐振子代数的 q 变形已经得到了较为广泛的研究^[6-8], 并且发现 q 变形后的相干态及其叠加态具有一些新的重要物理性质.

最近, 徐子骏^[9] 将 q 变形的概念推广到非简谐振子模型中, 由此得到 q 变形的非简谐振子广义相干态, 并且研究了这些状态的过完备性和 q 参数对 q 变形非简谐振子奇偶广义相干态中自然算符压缩率的影响. 文献[10, 11] 研究了非简谐振子广义奇偶相干态的基本性质. 王继锁等^[12] 构造了 q 变形非简谐振子湮没算符高次幂的本征态, 并且研究了这些态的一些性质. 本文在文献[12]工作的基础上

研究 q 变形非简谐振子湮没算符高次幂本征态的反聚束特性, 用数值计算给出 q 参数对它们的影响.

2 q 变形非简谐振子湮没算符高次幂的本征态

根据文献[13], 非简谐振子 Hamilton 量的无量纲形式为

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{A}{2x^2} \quad A > 0, \quad (1)$$

式中已取自然单位 $m = \hbar = \omega = 1$. 与之对应的产生算符 b^+ 和湮没算符 b^- 分别为

$$b^{\pm} = \frac{1}{2} (X \mp iP),$$

式中 X 和 P 分别为非简谐振子势场中的自然坐标和自然动量算符^[13]

$$X = x^2 - H, \quad P = \frac{1}{2i} \left(x \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} x \right),$$

它们满足对易关系:

$$[H, b^{\pm}] = \pm 2b^{\pm}, \quad [b^-, b^+] = H, \quad (4)$$

此即为非简谐振子代数的基本公式. 如果引入粒子数算符

$$N = \frac{1}{2} H - k,$$

式中 $k = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2A + \frac{1}{4}} \right)$, 则有

$$[N, b^-] = -b^-, [N, b^+] = b^+, \quad (6)$$

$$[b^-, b^+] = (N+1)(N+2k) -$$

$$N(N+2k-1) = 2N+2k. \quad (7)$$

按照文献[9], 定义 q 变形非简谐振子代数的产生、湮没算符 b_q^\pm ,

$$b_q^+ = \varphi(N)b^+ \quad b^+ \varphi(N+1), \quad (8)$$

$$b_q^- = b^- \varphi(N) = \varphi(N+1)b^- \quad (9)$$

其中变换算符

$$\varphi(N) = \sqrt{\frac{[N][N+2k-1]}{N(N+2k-1)}}, \quad (10)$$

式中符号 $[\chi]$ 可取为 $[\chi] = (q^x - 1)/(q - 1)$ 或 $[\chi] = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$, 并且 $q \in [0, 1]$. 则有

$$b_q^+ b_q^- = [N][N+2k-1], \quad (11)$$

$$b_q^- b_q^+ = [N+1][N+2k],$$

$$[N, b_q^-] = -b_q^-, [N, b_q^+] = b_q^+. \quad (12)$$

如果取 q 变量 $[\chi] = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$, 则有对易关系

$$[b_q^-, b_q^+] = b_q^- b_q^+ - b_q^+ b_q^- = [2N+2k]. \quad (13)$$

上面给出了 q 变形非简谐振子代数的基本公式(当变形参数 $q \rightarrow 1$ 时, $[n] \rightarrow n$, 即回到无变形的情况). q 变形非简谐振子粒子数算符 N 和湮没算符 b_q^- 以及产生算符 b_q^+ 作用于其能量本征态 $|n\rangle_q$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 可以得到

$$N|n\rangle_q = n|n\rangle_q, \quad (14)$$

$$b_q^- |n\rangle_q = \sqrt{[n][n+2k-1]} |n-1\rangle_q, \quad (15)$$

$$b_q^+ |n\rangle_q = \sqrt{[n+1][n+2k]} |n+1\rangle_q, \quad (16)$$

其中

$$|n\rangle_q = \frac{(b_q^+)^n}{\sqrt{[n]![2k]_n}} |0\rangle_q \quad (17)$$

满足正交归一化条件. 式中 $[n]! = [n][n-1] \cdots [2][1]$, $[2k]_n = [2k][2k+1] \cdots [2k+n-1]$, 并且规定 $[0]! = 1$, $[2k]_0 = 1$, 则 $|n\rangle_q$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 构成一个完备的 Hilbert 空间. q 变形非简谐振子广义相干态是 q 变形非简谐振子湮没算符的本征态

$$b_q^- |\beta\rangle_q = \beta |\beta\rangle_q, \quad (18)$$

可以解出 $|\beta\rangle_q$ 为

$$|\beta\rangle_q = [F_q(|\beta|^2)]^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{[n]![2k]_n}} |n\rangle_q, \quad (19)$$

式中 β 为复变量. 若令 $x = |\beta|^2$ (对应 q 变形广义

相干态中非简谐振子强度), 则可由归一化条件得到

$$F_q(|\beta|^2) = F_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]![2k]_n}. \quad (20)$$

当 $q \in [0, 1]$ 时, 如果取 $[\chi] = (q^x - 1)/(q - 1)$, 则 $F_q(x)$ 的收敛半径为 $R = 1/(1 - q)^2$; 如果取 $[\chi] = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$, 则 $F_q(x)$ 的收敛半径是 ∞ . 按照文献[12], q 变形非简谐振子湮没算符高次幂 $(b_q^-)^K$ ($K \geq 3$) 的本征态 (K 重简并态) 可表示为

$$|\psi_j\rangle_q = [A_j(|\beta|^2)]^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{mK+j}}{\sqrt{[mK+j]![2k]_{mK+j}}} |mK+j\rangle_q, \quad (21)$$

式中

$$A_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{mK+j}}{[mK+j]![2k]_{mK+j}} \quad (22)$$

是归一化因子, 并且已令 $x = |\beta|^2$ (对应 q 变形非简谐振子广义相干态中非简谐振子的强度), j 的可能取值范围为 $j = 0, 1, 2, \dots, K-1$.

3 q 变形非简谐振子湮没算符高次幂本征态的反聚束特性

对于普通意义下的光场, 如果其归一的二阶相关函数 $g^{(2)}(0) < 1$ ^[14], 则称此光场呈现反聚束效应. 对于 q 变形非简谐振子光场湮没算符高次幂的本征态, 可类似地定义其二阶相关函数为

$$g_j^{(2)}(0) = \frac{{}_q \langle \psi_j | (b_q^+)^2 (b_q^-)^2 | \psi_j \rangle_q}{[{}_q \langle \psi_j | b_q^+ b_q^- | \psi_j \rangle_q]^2}, \quad (23)$$

若 $g_j^{(2)}(0) < 1$, 则称这种光场存在反聚束效应. 由(15), (21)和(22)式可以得到

$$g_0^{(2)}(0) = \frac{{}_q \langle \psi_0 | (b_q^+)^2 (b_q^-)^2 | \psi_0 \rangle_q}{[{}_q \langle \psi_0 | b_q^+ b_q^- | \psi_0 \rangle_q]^2} = \frac{A_0 A_{K-2}}{A_{K-1}^2},$$

$$g_1^{(2)}(0) = \frac{{}_q \langle \psi_1 | (b_q^+)^2 (b_q^-)^2 | \psi_1 \rangle_q}{[{}_q \langle \psi_1 | b_q^+ b_q^- | \psi_1 \rangle_q]^2} = \frac{A_1 A_{K-1}}{A_0^2}, \quad (24)$$

$$g_j^{(2)}(0) = \frac{{}_q \langle \psi_j | (b_q^+)^2 (b_q^-)^2 | \psi_j \rangle_q}{[{}_q \langle \psi_j | b_q^+ b_q^- | \psi_j \rangle_q]^2} = \frac{A_{j-2} A_j}{A_{j-1}^2},$$

$(j = 2, 3, \dots, K-1)$.

由(22)式可以知道, 上述 q 变形非简谐振子湮没算符高次幂本征态的二阶相关函数是变量 $x = |\beta|^2$ 的函数, 并且与变形参量 q 密切相关. 当变量 x 在某些区间内取值时, 存在 $g_j^{(2)}(0) < 1$ ($j = 0, 1, 2$,

..., $K-1$), 即 $(b_q^-)^K$ 的 K 个本征态呈现反聚束效应, 下面通过数值计算证明这一点.

在这里只以 $K=3$ 的情况为特例, 对于 $K>3$ 的情形可以类似地进行研究. 在 (24) 式中取 $K=3$ 得到

$$\begin{aligned} g_0^{(2)}(0) &= A_0 A_1 / A_2^2, & g_1^{(2)}(0) &= A_1 A_2 / A_0^2, \\ g_2^{(2)}(0) &= A_0 A_2 / A_1^2. \end{aligned} \quad (25)$$

对 (25) 式所表示的二阶相关函数作数值计算, 计算结果精确到小于 10^{-10} . 图 1—3 分别表示 q 变量取 $[\chi] = (q^x - q^{-x}) / (q - q^{-1})$, 变形参数 q 取值为 1.0, 0.7, 0.5, 0.3 时, $g_j^{(2)}(0) (j=0, 1, 2)$ 与 x 的变化关系. 由图可以看出, q 变形非简谐振子湮没算符高次幂本征态的二阶相关函数受到参数 q 的调节. 随着 q 值的变小, 曲线起伏变化趋势非常明显, 并且向 $x = |\beta|^2$ 增大的方向移动. 表 1 是 $|\psi_j\rangle_q (j=0, 1, 2)$ 态能呈现反聚束效应的第一区间. 由于 $A_j(x)$ 的收敛半径是 ∞ , 原则上可计算得使 $x = |\beta|^2$ 取值非常大. 在计算过程中还发现, 随着 $x = |\beta|^2$ 取值的变大, $g_j^{(2)}(0) (j=0, 1, 2)$ 可以大于 1, 也可以小于 1, 并且这种变化交替地出现在多个区间, 人们称这种现象为超聚束现象^[15]. 对 $g_0^{(2)}(0) < 1$, $|\psi_0\rangle_q$ 态呈现反聚束效应在 $x > 1$ 的某些区间内; 对 $g_1^{(2)}(0) < 1$ 和 $g_2^{(2)}(0) < 1$ 的情况, $|\psi_1\rangle_q$ 和 $|\psi_2\rangle_q$ 态呈现反聚束效应在 x 轴上的若干区间内, 第一区间在 $0 < x < \text{大于} 1$ 的某一值. 当 q 偏离 1 越大时, 这些区间也随着增大. 然而非谐振项的影响不是那么明显, 并且随着非谐振项系数 A 取值变大时, 曲线变化趋势向 x 轴负方向移动^[16].

表 1 算符 $(b_q^-)^3$ 的本征态可以呈现反聚束效应的第一区间

	$q=1.0$	$q=0.7$	$q=0.5$	$q=0.3$
$ \psi_0\rangle_q, g_0^{(2)}(0) < 1$	$4.71 \leq X \leq 16.25$	$4.97 \leq X \leq 22.00$	$6.46 \leq X \leq 67.55$	$13.32 \leq X \leq 726.68$
$ \psi_1\rangle_q, g_1^{(2)}(0) < 1$	$0 \leq X \leq 2.79$	$0 \leq X \leq 2.91$	$0 \leq X \leq 3.46$	$0 \leq X \leq 5.61$
$ \psi_2\rangle_q, g_2^{(2)}(0) < 1$	$0 < X \leq 8.01$	$0 < X \leq 9.21$	$0 < X \leq 16.36$	$0 < X \leq 65.18$

4 结论

本文研究了 q 变形非简谐振子湮没算符高次幂本征态的反聚束特性, 并用数值计算方法就 $K=3$ 的情形研究了变形参数 q 对它们的影响. 结果表明, q 变形非简谐振子湮没算符高次幂本征态的反聚束特性明显地受到变形参量 q 的调制. 随着 q 变形非简谐振子的强度 $x = |\beta|^2$ 取值的增大, $|\psi_j\rangle_q (j=0, 1, 2)$ 态的二阶相关函数可以大于 1, 也可以小于 1, 这种变化交替地出现在多个区间内. $|\psi_0\rangle_q$ 态

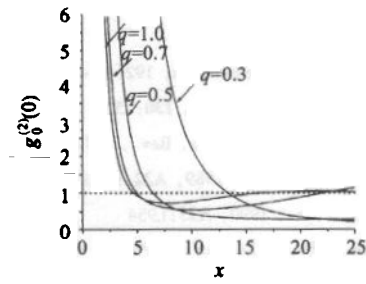


图 1 $g_0^{(2)}(0)$ 随 x 的变化

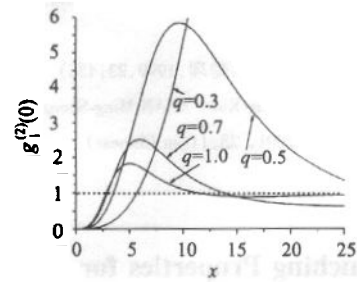


图 2 $g_1^{(2)}(0)$ 随 x 的变化

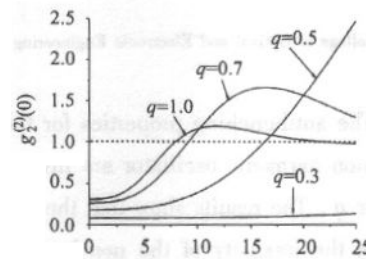


图 3 $g_2^{(2)}(0)$ 随 x 的变化

呈现反聚束效应在 $x > 1$ 的若干区间内; $|\psi_1\rangle_q$ 和 $|\psi_2\rangle_q$ 态呈现反聚束效应在 x 轴上的许多区间, 第一区间在 $0 < x < \text{大于} 1$ 的某个数值. 随着 q 变量偏离 1 越大, 使得反聚束效应的区间变大, 曲线起伏交替变化的趋势明显地向 x 增大的方向移动. 本文的讨论初步揭示了 q 变形非简谐振子湮没算符高次幂本征态的反聚束效应这一量子统计特性, 这对深入地研究非简谐振子势场的规律性将具有一定的学术参考价值. 另一方面, 本文的研究也是对有关工作的进一步发展和完善.

参考文献 (References)

- 1 Schrödinger E. *Naturwissenschaften*, 1926, **14**:664
- 2 Glauber R J. *Phys. Rev.*, 1963, **130**:2529
- 3 Nieto M M, Simmons L M. *Phys. Rev.*, 1979, **D20**:1321
- 4 Biedenharn L C. *J. Phys.*, 1989, **A22**:L873
- 5 Gray R W. *J. Phys.*, 1990, **A23**:L954
- 6 WANG Fa-Bo, KUANG Le-Man. *J. Phys.*, 1993, **A26**:293
- 7 CHANG Zhe, CHEN Wei, GUO Han-Ying. *J. Phys.*, 1990, **A23**:4185
- 8 CHANG Zhe, CHEN Wei, YAN Hong. *J. Phys.*, 1990, **A23**:4235
- 9 XU Zi-Wen. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.*, 1999, **23**:436 (in Chinese)
(徐子文. 高能物理与核物理, 1999, **23**:436)
- 10 WANG Ji-Suo, LIU Tang-Kun, ZHAN Ming-Sheng. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.*, 2001, **25**:11(in Chinese)
(王继锁, 刘堂昆, 詹明生. 高能物理与核物理, 2001, **25**:11)
- 11 WANG Zhong-Qing. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.*, 2001, **25**:1044(in Chinese)
(汪仲清. 高能物理与核物理, 2001, **25**:1044)
- 12 WANG Ji-Suo, LIU Tang-Kun, ZHAN Ming-Sheng. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.*, 2000, **24**:1115 (in Chinese)
(王继锁, 刘堂昆, 詹明生. 高能物理与核物理, 2000, **24**:1115)
- 13 ZHU Dong-Pei. *J. Phys.*, 1987, **A20**:4331
- 14 Walls D F. *Nature*, 1983, **306**:141
- 15 WANG Ji-Suo, SUN Chang-Yong, ZHAO Ming-Jian. *Acta Optica Sinica*, 1997, **17**:293 (in Chinese)
(王继锁, 孙长勇, 赵铭健. 光学学报, 1997, **17**:293)
- 16 WANG Zhong-Qing. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2002, **19**:435 (in Chinese)
(汪仲清. 量子电子学报, 2002, **19**:435)

Antibunching Properties for the Eigenstates of the Higher Powers of Annihilation Operator of a q -Deformed Non-harmonic Oscillator

WANG Zhong-Qing

(College of Optical and Electronic Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract The antibunching properties for the eigenstates of the K th powers ($K \geq 3$) of the annihilation operator of the q -deformed non-harmonic oscillator are investigated. The numerical method is used to study the properties influenced by the parameter q . The results show that the eigenstates exhibit antibunching effects in a number of intervals of $x = |\beta|^2$, which reflects the intensity of the non-harmonic oscillator in q -deformation generalized coherent state. The effects are evidently influenced by the parameter q . When q is taken values departure from 1 greatly, these intervals become larger, and shift toward the positive x direction.

Key words q -deformation, non-harmonic oscillator, higher powers of an annihilation operator, eigenstate, antibunching effect