

计算机断层扫描在“双成像法”测量束流二维相空间中的应用*

谷安佳 赵夔 丁原涛 张保澄 全胜文 陈佳洱

(北京大学物理学院重离子物理研究所,北京 100871)

摘要 文中分析了利用计算机断层扫描(CT)测量束流二维相空间的物理原理,并从数学上证明了现有方法(CT+四极铁磁场扫描)存在 Radon 变换角度空档,需要假设某一束流模型进行插值,图像重建的精度不高甚至失真;而结合 Cerenkov 辐射“双成像法”,可以同时得到束流横向剖面 and 散角分布的 Radon 投影,从而将 Radon 变换角的范围扩展到完整的 $0-\pi$. 文中以一个不对称的束流二维相空间分布为例,给出了计算机模拟实验结果,检验了该新方法进行束流二维相空间图像重建的高精度性和可行性.

关键词 Cerenkov 辐射“双成像法” 计算机断层扫描(CT) Radon 变换 图像重建 束流二维相空间

1 引言

CT(Computerized tomography),即计算机断层成像技术,在医学上利用 X 射线、超声波、磁场等辐射源透射人体器官,从多个观测角度获取一系列投影数据,由计算机完成数据处理和图像重建. Radon 变换为这类层析成像问题提供了一个统一的数学基础.

如图 1 所示,设一个具有某种物理性质的二维分布的目标函数 $f(x, y)$ 定义在平面区域 Ω 内, $p(x_1, \theta)$ 表示 $f(x, y)$ 沿 x_1 和 θ 定义的一条直线的线积分, $f(x, y)$ 的所有线积分集合为

$$p(x_1, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1) dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta) dy_1 \quad \theta \in [0, \pi),$$

其中,旋转坐标变换关系:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y_1 = x \sin \theta - y \cos \theta \end{cases}$$

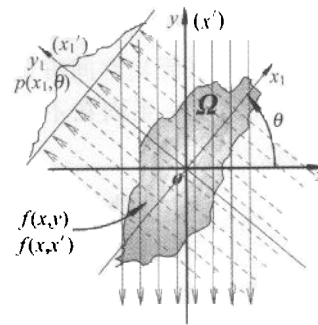


图 1 一个断层的投影数据的采集示意图

(x, y) 是二维物体空间的坐标,
 (x_1, y_1) 是旋转采样的旋转坐标系.

如果目标函数 $f(x, y)$ 未知,而它的所有投影(即 $\theta \in [0, \pi)$ 的所有线积分)却能通过某种方法获得,则 $f(x, y)$ 便可由 $p(x_1, \theta)$ 唯一的确定. (1) 式所联系的目标函数和它的投影函数之间的积分变换就是 Radon 变换. 我们定义变换式中的 θ 为 Radon 角. 图像重建问题就是要求解 Radon 逆变换,即给定 $p(x_1, \theta)$ 求解 $f(x, y)$ ^[1]

2002-08-28 收稿

* 国家自然科学基金(10075006, 19985001)资助

2 束流二维相空间测量中 CT 物理原理

我们现在把二维目标函数 $f(x, y)$ 换成束流相空间密度函数 $f(x, x'; z)$, 则积分式 $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x'; z) dx'$ 表示的是位于输运段出口点 z 处的束流横向剖面 $x-x+dx$ 范围内所包含的带电粒子的总数. 若在此位置放置一个能获取束流剖面的成像装置 BPM (Beam Profile Monitor, 如荧光靶、Cerenkov 辐射靶、OTR 靶等), 该积分式即对应了所获取的图像 $x-x+dx$ 范围内所有像素的叠加, 亦即: $g(x)$ 表达了束流横向剖面图沿角度为零的 Radon 投影^[2].

由此, 我们看到, 如果存在某种参数可调的传输元件, 其传输矩阵的作用能使束流相空间从 0 到 180° 作纯粹的旋转, 则我们可以把这一过程类比于医学 CT 扫描中的人体不动而 CT 机绕着人体作 180° 的旋转. 因而, 现有 CT 成熟的算法均可应用到测量束流二维相空间的图像重建中来.

实际上比较可行的做法是在传输段中加入一对四极透镜, 四极透镜对束流相空间有旋转和变形的作用, 如图 2(b), 表达了一系列在不同的磁场梯度下的相空间椭圆边界.

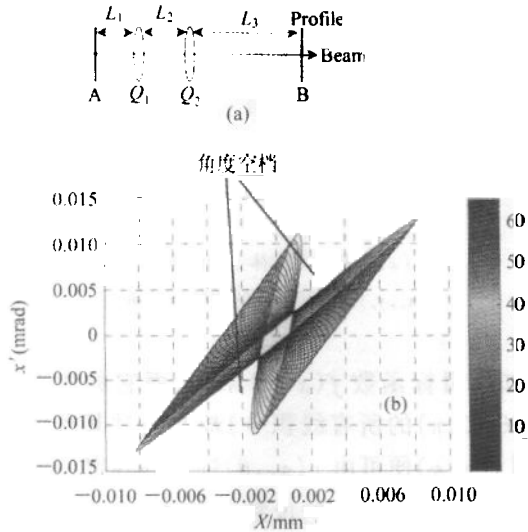


图 2 四极铁组合对相空间的作用存在较大的旋转角度空档

如图 2(a) 所示, 传输段中 A 点到 B 点的传输矩阵:

$$M_{BA} = M_{L_3} M_{Q_2} M_{L_2} M_{Q_1} M_{L_1} =$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_a \cos \theta_1 & p_a \sin \theta_1 \\ p_b \sin \theta_2 & p_b \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其中: $p_a = \sqrt{m_{11}^2 + m_{12}^2}$, $p_b = \sqrt{m_{21}^2 + m_{22}^2}$, (4)

$$\theta_1 = \arctan \frac{m_{12}}{m_{11}}, \theta_2 = \arctan \frac{m_{21}}{m_{22}}. \quad (5)$$

又: $|M_{BA}| = 1$, 得: $p_a p_b \cos(\theta_1 + \theta_2) = 1$, $p_a p_b \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sqrt{p_a^2 p_b^2 - 1}$, 有:

$$M_{BA} = \begin{pmatrix} p_a \cos \theta_1 & p_a \sin \theta_1 \\ p_b \sin \theta_2 & p_b \cos \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_a & 0 \\ \frac{\sqrt{p_a^2 p_b^2 - 1}}{p_a} & \frac{1}{p_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} = M_F M_R. \quad (6)$$

显然, M_R 即为单位旋转矩阵, M_F 为某种仿射变换矩阵. 我们看到, 由矩阵变换运算, 四极透镜对束流相空间的作用相当于一次旋转变换 (M_R) 和一次仿射变换 (M_F), 即对应了一次纯旋转 (不变形) 和一次纯形状畸变 (不旋转).

根据束流传输 σ 矩阵理论, 相椭圆边界方程为 $\sigma_{22} x^2 - 2\sigma_{12} x x' + \sigma_{11} x'^2 = \epsilon^2$, 有:

$$\begin{pmatrix} x_B \\ x'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x'_A \end{pmatrix} = M_F M_R \begin{pmatrix} x_A \\ x'_A \end{pmatrix}$$

以下着重考虑仿射变换项 M_F 对相空间的畸变作用 (图 3):

$$\begin{cases} x_1 = p_a x_0 \\ x'_1 = A x_0 + \frac{1}{p_a} x'_0 \quad \left(\text{令 } A = \frac{\sqrt{p_a^2 p_b^2 - 1}}{p_a} \right) \end{cases} \quad (7)$$

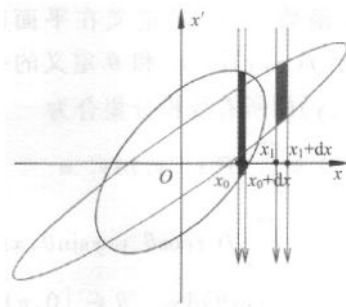


图 3 仿射变换对应的投影积分函数变换

变换后的投影函数:

$$g(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x'_1) dx'_1 =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(p_a x_0, Ax_0 + \frac{1}{p_a} x'_0\right) d\left(Ax_0 + \frac{1}{p_a} x'_0\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) dv = g(u) = g(p_a x_0)$$

$$\left(\text{令 } u = p_a x_0, v = Ax_0 + \frac{1}{p_a} x'_0\right).$$

由此,仿射变换式(7)的结果是使相空间投影沿横坐标伸长到原来的 p_a 倍. 亦即,仿射变换后,将横坐标收缩到 $1/p_a$. 即还原出束流剖面在仿射变换前(即四极透镜对相空间作用之前)的 Radon 投影信息. p_a 为(4)式中所定义的放缩比例.

而旋转矩阵元 M_R 的作用即对应了标准的 CT 平行投影方式,借用成熟的 CT 图像重建算法即可. 其中 θ_1 (或 θ_2)对应着 Radon 变换角. 因而,通过把四极铁对相空间的作用分解成“仿射变换 + 旋转变换”,我们找到了将 CT 扫描和 Radon 变换应用到束流二维相空间测量的物理原理. 与现有的其他参考文献[2—4]所给出的分析(将 Radon 变换公式和四极铁传输公式进行纯粹形式上的比较和变量代换)相比,这种分析过程其物理意义更加明朗.

3 现有方法中存在的图像重建 Radon 角度空档

将四极铁的传输矩阵参数代入(3)式,为简便起见,先考虑只用一个聚焦四极磁铁的情况和采用薄透镜近似,设 A、B 距聚焦四极磁铁 Q 的距离分别为

$$L_1, L_2, \text{ 则 Q 铁的传输矩阵: } M_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中}$$

$$f = \frac{1}{kl}, l \text{ 和 } k \text{ 分别为 Q 铁的有效长度和聚焦强度.}$$

$$\text{令 } F = \frac{1}{f}, \text{ 有:}$$

$$M_{BA} = M_{L_2} M_Q M_{L_1} = \begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - L_2 F & L_1 + L_2 - L_1 L_2 F \\ -F & 1 - L_1 F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

由(5)式,得:

$$\theta_1 = \arctan \frac{L_1 + L_2 - L_1 L_2 F}{1 - L_2 F} =$$

$$\arctan \left(\frac{L_1}{L_1} + \frac{L_2}{1 - L_2 F} \right).$$

由于我们考虑聚焦四极磁铁, F 的取值应大于零. 则 $L_1 + \frac{L_2}{1 - L_2 F}$ 在 $F > 0$ 的情况下值域为 $(-\infty, L_1) \cup (L_1 + L_2, +\infty)$. 于是, θ_1 的取值为 $(-\pi/2, \arctan L_1) \cup (\arctan(L_1 + L_2), \pi/2)$. 我们看到,除非 $L_2 = 0$, 否则, θ_1 的取值不可覆盖 π 的范围. 但当 $L_2 = 0$ 即漂移距离为零时,四极铁的聚焦作用根本就体现不出来. 另外 F (对应了四极铁的聚焦强度)也不可能取太大的值,否则束流将过聚焦而损失. 因而,现有方法中 Radon 角覆盖的范围不可能达到 $0-\pi$, 如图 2(b)所示,中间必然存在一系列的角度空档. 当然,可以利用透镜组,严格调整四极铁 Q_1, Q_2 的聚焦强度,漂移距离 L_1, L_2, L_3 等参数的取值,可以使 θ 的覆盖范围尽可能的大. 美国 Duke 大学得到的 θ 范围是 0.96π , 已经趋近理论极限,但仍然存在 7° 左右的角度空档,其重建的图像有明显不连贯的迹象^[2].

同理,对于与 θ_1 地位同等的 θ_2 进行同样的分析,其取值范围亦不可能包括 $0-\pi$. 对于使用两个或更多的四极铁组合,类似的推导过程可得出 θ_1 (或 θ_2)的取值不可能覆盖整个 π 的区间. 从而,我们从数学上推导出,采用传统方法(用四极铁组合)来旋转束流相空间, Radon 变换角 θ 将存在角度空档,不可能实现完整的 $0-\pi$ 的 Radon 逆变换. 通常的做法是在“角度空档”区进行近似插值. 而一旦需要插值,就有采用何种假定的束流模型的问题,必然影响图像重建精度,甚至使重建的图像严重失真,变得不连贯和出现裂痕^[2]. 应用 Cerenkov 辐射“双成像法”^[5]可以巧妙地解决这一难题.

4 Cerenkov 辐射“双成像法”的应用

Cerenkov 辐射“双成像法”是一种直接测量电子束发射度的方法,利用相对论电子穿过透明介质发出的切伦科夫辐射光,通过一长焦距的消色差薄透镜,用 CCD 相机分别在焦平面和像平面获取图像,并通过图像处理可分别得到电子束散角分布和电子束径向分布,从而根据 RMS 发射度的定义直接得到均方根发射度^[5].

通过“双成像法”,我们同时获得了束流横向剖面图和散角分布图(图4). 根据上文所述的束流二

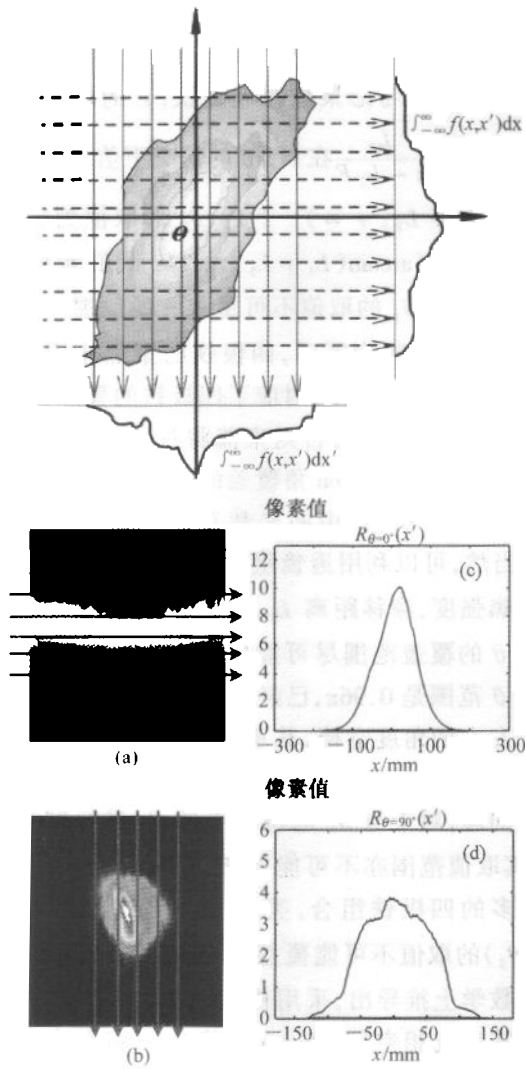


图 4 Cerenkov 辐射“双成像法”应用在 CT 扫描束流二维相空间的示意图

维相空间测量中 Radon 变换的物理思想,束流的散角分布的 Radon 投影即对应了积分式 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, x') dx$. 而对于 Radon 图像重建算法而言,该积分式和横向剖面的投影积分式 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, x') dx'$ 地位是平等的,即相当于图 1 的 Ω 平面区域顺时针旋转了 90° . 因此我们就可以绕开常规方法中只对横向剖面进行投影而不可避免地出现的 Radon 角度空档,用焦平面图像(散角分布)在像平面(束流横向剖面)的空档角度内进行 Radon 逆变换,从而使 Radon 角度完整地扩展到 $0-\pi$ 的闭区间. 由于采用了“双成像法”,像平面和焦平面分别只需要负责 $0-90^\circ$ 的 Radon 变换角,因而图像重建算法的步长可以取到很小的精度,并且对 Q 铁磁场梯度、有效长度和束流漂移距离的等参数条件的要求都大大降低.

5 二维相空间图像重建的计算机模拟结果

考虑实际相空间可能存在的不对称性(可以证明,对于具有轴对称或点对称性的相空间分布,其 Radon 角度范围也仅仅只需要 $0-90^\circ$),我们假设某一相空间边界为图 5 所示不对称的组合椭圆,在四极铁的作用下进行 $0-180^\circ$ (步长为 1°) 的连续旋转和变形,得出一系列组合椭圆(即为通过四极铁后的束流相空间),根据上述理论分析,运用 Cerenkov 辐射“双成像法”分别生成像平面和焦平面图像⁵,并进行 Radon 投影,得到对应的 Radon 变换过程图和相空间重建图分别如图 6(a),(b)所示. 其中图 6(a) 中点划线左边 ($0-90^\circ$ Radon 角)为“双成像法”中相应角度的像平面图像进行 Radon 投影生成,右边 ($91-180^\circ$ Radon 角)为相应角度的焦平面图像进行 Radon 投影生成.

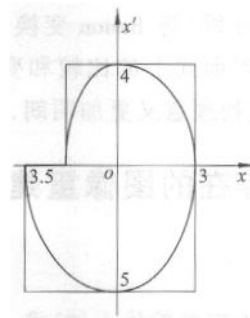


图 5 不对称的组合椭圆相空间

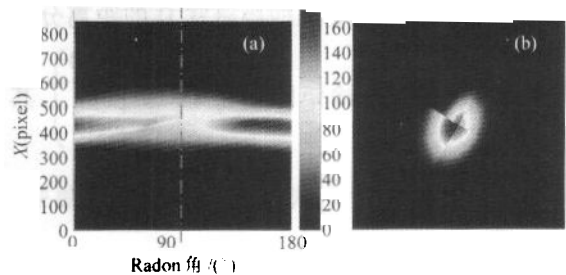


图 6 图像重建的计算机模拟结果图 (a) Radon 变换图;(b) 二维相空间图像重建 (Radon 逆变换结果).

6 结论

由计算机模拟结果可以看出,由于实现了完整的 $0-\pi$ 的 Radon 逆变换,束流二维相空间的重建图像边界非常清晰,精度极高. 实际测束实验正在筹备和进行当中.

参考文献 (References)

- 1 Herman G T. Image Reconstruction from Projections: Implementation and Applications. Germany: Springer Verlag, 1992. 17—30
 - 2 McKee C B, O'Shea P G et al. Nucl. Instr. & Meth. In Phys. Res., 1995, **A358**:264—267
 - 3 SHI Yi-Jin. High Power Laser and Particle Beams, 2000, **12**(2): 231—234 (in Chinese)
 - 4 Geitz M, Schmidt G, Schmuser P. Phase Space Tomography at the TES-LA Test Facility IJINAC, Proceedings of the 1999 Particle Accelerator Conference, New York, 1999
 - 5 GU An-Jia, DING Yuan-Tao, ZHAO Kui et al. HEP & NP, 2003, **27**(2):163 (in Chinese)
- (谷安佳,丁原涛,赵夔等. 高能物理与核物理,2003,27(2):163)

Beam 2-D Phase-Space Measurement with CT and Cerenkov Radiation “Double Imaging Method” *

GU An-Jia ZHAO Kui DING Yuan-Tao ZHANG Bao-Cheng
QUAN Sheng-Wen CHEN Jia-Er

(Institute of Heavy Ion Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract This paper proposes a new method to measure the 2-D beam transverse phase space with computerized tomography (CT) technique and Cerenkov radiation “double imaging method”. The usual method with CT technique entirely depends on the quadrupole-scanning and can not get a full π Radon rotation angle, which is essential to the Radon transform, the mathematic fundamental of CT technique. Therefore, it has to prior assume a certain kind of phase space distribution to extrapolate the vacancy of Radon rotation angle, which makes the reconstructed image imperfect and yields errors especially when the phase space distributions practically are not ideal. In this paper, by means of Cerenkov radiation double image method and mathematical analysis, we obtain a full rotation angle of the beam phase space precisely from 0 to π . Hence we can measure the actual 2-D transverse-phase-space density without making any prior assumptions about phase space distributions. The simulation results show that this new method is feasible and with much higher precision.

Key words Cerenkov radiation “double imaging method”, computerized tomography (CT), Radon transform, image reconstruction, 2-D transverse-phase-space