体积算符对顶角作用的重耦矩阵

邵丹[1]　邵亮[1]　邵常贵[2]　陈贻汉[2]

1 (Department of Mathematical Sciences, Ibaraki University, Mito 310-8512, Japan)

2 (湖北大学理论物理所　武汉　430062)

摘要　用重耦理论的图形计算法,系统推出了非微扰量子引力自旋结网圈表象体积算符对顶角作用的重耦矩阵的图形表式和记号表式.

关键词　自旋结网态　重耦矩阵　n 价顶角　体积算符

1　引言

Penrose的用粒子自旋角动量提供物理系统量子化方法的思想的独特之处,是这种量子化手段是由组合结构形成的纯关系,且是离散的[1]. 它不依赖于时空背景,从而将其用于引力场非微扰的量子化,将具有更深刻的意义和更为适宜的前景[2]. 近些年来,在 Ashtekar 的 GR 正则体系的量子化过程中,这种基于离散量子几何和粒子自旋角动量的表示的表象得到了长足的更加完备的发展和深入的应用,并在非微扰量子引力的圈表象以及拓扑量子场论的研究上得到了丰富的具体结果[2—5].

在时空流形 M 做 3+1 分解而得到的 3 维流形的切空间上,"焊"上三脚标架场后,Ashtekar 认为 GR 的正则体系将具有 $SU(2)$ 规范不变性. 由 $SU(2)$ 的 Ashtekar-Sen 联络得到的自旋结网圈表象的量子态均为态空间的基态,且满足 Mandelstam 恒等式. 当用抓算符实现体积与面积"物理量算符"对自旋结网圈态的作用时,将得到体积与面积离散量子化的结果,从而预言时空量子化.

目前,体积算符的作用机制不止一种,本文用重耦理论的图形计算方法,完整系统地推算出了体积算符对自旋结网顶角作用的重耦矩阵的图形表式和记号表式.

2　体积算符对自旋结网圈态的作用

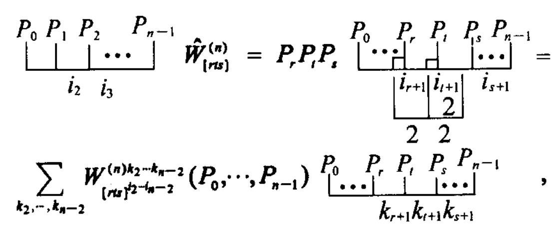
设时空流形 M 微分同胚于 $\Sigma\times R$,此处 Σ 为 3 维空间流形,R 为实数域. 并设 S 为 Σ 中的自旋结网圈. 则 Σ 中一区域 Ω 的体积算符 $\hat V(\Omega)$ 对自旋结网态 $\langle S|$ 的作用为[6]

$$\langle S|\hat V(\Omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i\in\{S\cap v\}}\varepsilon^3\langle S|\sqrt{\left|\hat W_{I_\varepsilon^i}\right|}\,,\qquad(1)$$

式中 v 为区域 Ω 中被划分而得的体积为 I_ε^i 的微小区域. i 为自旋结网圈的顶点. $\hat W_{I_\varepsilon^i}$ 为微体积 I_ε^i 对应的体积算符. ε 为微体积尺度参量. 且有

$$\langle S|\hat W_{I_\varepsilon^i} = \frac{i l_0^6}{16\times 3!}\sum_{r,t,s=0,\cdots,n-1}\langle S\|\hat W^{(n)}_{[rts]}|\,,$$
$$r,t,s = 0,\cdots,n-1\,,\qquad(2)$$

式中 $\hat W^{(n)}_{[rts]}$ 为抓住自旋结网圈第 i 个(n 价)顶角上的边 r,t,s 的体积算符,它对顶角的作用如下



(3)

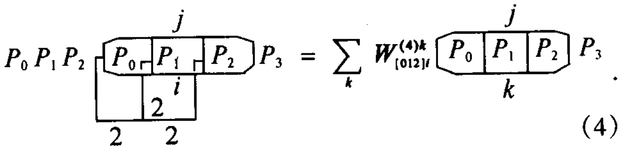
式中 $W^{(n)k_2\cdots k_{n-2}}_{[rts]i_2\cdots i_{n-2}}(P_0,\cdots,P_{n-1})$ 即为重耦矩阵,p_i $(i=0,\cdots,n-1)$ 为该 n 价顶角的外脚颜色,即 Wilson 圈通过该外脚的次数. 体积算符 $\hat W^{(n)}_{[rts]}$ 对自旋结网圈的所有可能作用,为自旋结网圈内脚按相容条件得到的所有连接方式的线性组合.

3　对 4 价及以下顶角作用的重耦矩阵

在 $n=4$ 情况下,选 r,t,s 分别为 0,1,2,则体

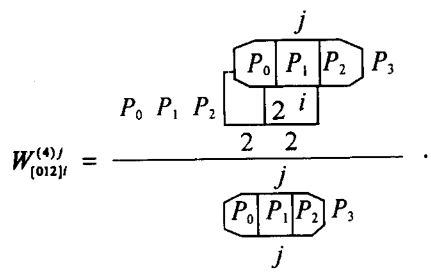
2003－05－01 收稿

积算符 $\hat{W}^{(4)}_{[012]}$ 的作用图经封闭后为

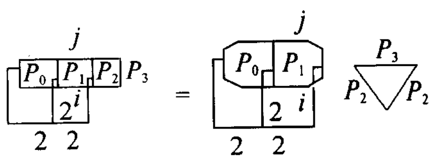


(4)

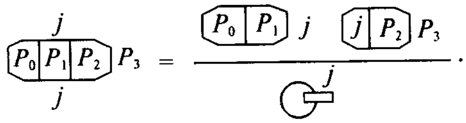
由重耦理论的顶角相容条件知,上式右侧图中脚的颜色数 k 和 j 应相等. 从而有

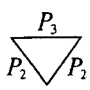


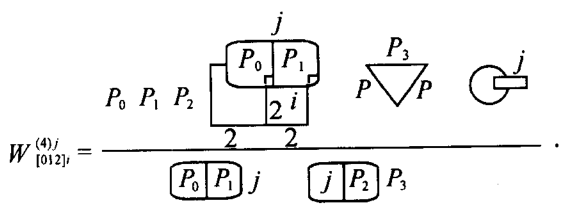
将上式分子与分母中的两个图进行分解,分别得



和



这里在图形分解过程中为表达方便,采用了去掉了外脚的图  ,它并非系一完整的自旋结网圈. 它的具体算式,由附录(A2)式给出. 从而,(4)式利用如上分解,将变为如下图形表式:



(5)

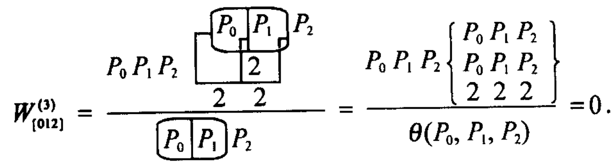
按重耦理论的基本公式(附录中(A1)至(A4))上式可以写成记号表式

$$W^{(4)j}_{[012]i} = \frac{P_0P_1P_2\begin{Bmatrix} P_0 & P_1 & j \\ P_0 & P_1 & i \\ 2 & 2 & 2 \end{Bmatrix} \mathrm{Tet}\begin{bmatrix} i & j & P_3 \\ P_2 & P_2 & 2 \end{bmatrix} \Delta_j}{\theta(i,2,j)\theta(P_0,P_1,j)\theta(j,P_2,P_3)} . \tag{6}$$

利用附录中(A5)式,上式可化简为

$$W^{(4)j}_{[012]i} = \frac{P_0P_1P_2\begin{Bmatrix} P_0 & P_1 & j \\ P_0 & P_1 & i \\ 2 & 2 & 2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i & P_3 & j \\ P_2 & 2 & P_2 \end{Bmatrix}}{\theta(P_0,P_1,j)} . \tag{7}$$

对于 $n = 3$,微体积算符 $\hat{W}^{(3)}_{[012]}$ 对该 3 价顶角作用的封闭图将与(4)不同,区别是此时的图中将不存在(4)式图中的脚 P_3,从而有

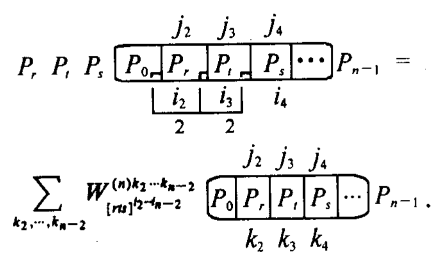


这是因为上式分子中对应于六边形的 9 - j 记号的 9 个元素中,交换任意两行均为反对称之故.

对于 $n = 2$,此时顶角的结构为只有两条脚与顶点相连. 由于微体积算符中含有 3 个抓的圈算符 $T^{abc}[\alpha_{rts}]$ 的两个抓将抓在同一点上,由 $T^{abc}[\alpha_{rts}]$ 的 3 个上指标的反对称性,将导致体积算符自身为零.

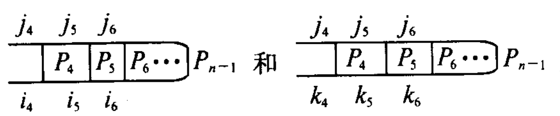
4　对 5 价及以上顶角作用的重耦矩阵

将(3)中第二个等号两端的自旋结网图分别封闭,所得结果仍然相等,即有



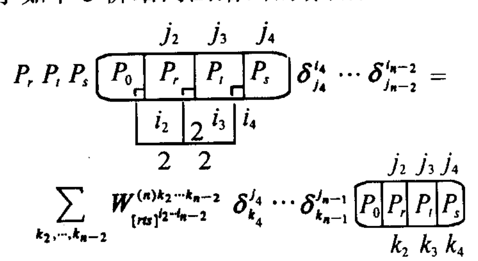
(8)

此时,(8)式等号左侧和右侧的两个图的右部分别为



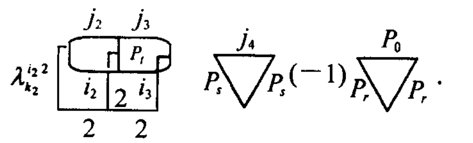
(9)

采用条件 $i_4 = j_4 = k_4, \cdots, i_{n-2} = j_{n-2} = k_{n-2}$,则(9)式中的两个图相同,利用附录中(A6)式,该二式均简化为相同的因子乘以一竖线. 从而(8)式等价于如下 5 价结网圈给出的作用图:



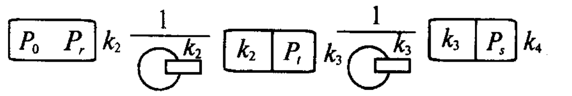
(10)

与(4)式左侧的图形分解类似,(10)式左侧图形可分解为



(11)

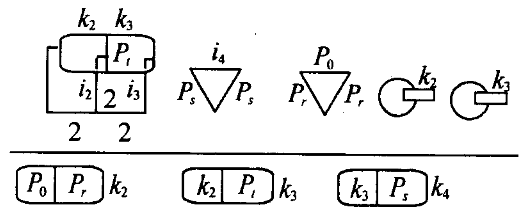
而右侧图形可分解为



(12)

此处利用了相容条件 $k_2=j_2$, $k_3=j_3$. 将如上分解后的图形代入(10),经整理后得该重耦矩阵的图形表式为

$$W^{(n)k_2\cdots k_{n-2}}_{[rts]i_2\cdots i_{n-2}}=-\lambda^{i_2 2}_{k_2}P_rP_tP_s\delta^{j_4}_{k_4}\cdots\delta^{i_{n-1}}_{k_{n-1}}$$



(13)

将附录中的有关公式代入上式,得重耦矩阵 $W^{(n)}_{[rts]}$ 的记号表式为

$$W^{(n)k_2\cdots k_{n-2}}_{[rts]i_2\cdots i_{n-2}}=-\lambda^{i_2 2}_{k_2}P_rP_tP_s\begin{Bmatrix}k_2 & P_t & k_3\\ i_2 & P_t & i_3\\ 2 & 2 & 2\end{Bmatrix}\delta^{k_4}_{i_4}\cdots\delta^{k_{n-2}}_{i_{n-2}}\frac{\mathrm{Tet}\begin{bmatrix}k_2 & i_2 & P_0\\ P_r & P_r & 2\end{bmatrix}\mathrm{Tet}\begin{bmatrix}i_3 & k_3 & k_4\\ P_s & P_s & 2\end{bmatrix}\Delta_{k_2}\Delta_{k_3}}{\theta(2,k_2,i_2)\theta(2,i_3,k_3)\theta(P_0,P_r,k_2)\theta(k_2,P_t,k_3)\theta(k_3,P_s,k_4)}\,. \tag{14}$$

经进一步化简可得作用于 n 价顶角的重耦矩阵的记号表式为

$$W^{(n)k_2\cdots k_{n-2}}_{[rts]i_2\cdots i_{n-2}}=-\lambda^{i_2 2}_{k_2}P_rP_tP_s\delta^{k_4}_{i_4}\cdots\delta^{k_{n-2}}_{i_{n-2}}\begin{Bmatrix}k_2 & P_t & k_3\\ i_2 & P_t & i_3\\ 2 & 2 & 2\end{Bmatrix}\frac{\begin{Bmatrix}P_0 & i_2 & k_2\\ 2 & P_r & P_r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}i_3 & k_4 & k_3\\ P_s & 2 & P_s\end{Bmatrix}}{\theta(k_2,k_3,P_t)}\,. \tag{15}$$

5 讨论

目前圈表象量子引力仅有两种形式,除本文所属的自旋结网圈量子引力外,另一种则是扩展圈表象量子引力. 寻找量子引力态以及明确相关问题是此两种圈量子引力的共同核心. 而对于前种量子引力而言,目前已开始了物理量算符的构造以及具体结果获得的研究.

(5)与(13)式分别为微体积算符对4价和 n 价自旋结网圈顶角作用的重耦矩阵的图形表式. 本文在重耦理论中,利用体积算符所含的抓算符,通过顶角外脚的封闭,给出了体积算符对顶角的作用. 系统和完整地推算出了(5)与(13)式. (7)与(15)式分别为它们的记号表式,这些表式更为简明[7]. 可以验证,作用于 n 价顶角的体积算符的重耦矩阵(13)或(15),当取 $n=4$ 时,可以分别化为(5)或(7). 不难知道,重耦矩阵 $W^{(n)k_2\cdots k_{n-2}}_{[rts]i_2\cdots i_{n-2}}$ 是反对称实矩阵,而且是可以对角化的. 这样,按矩阵理论纯虚矩阵 $\mathrm{i}W^{(n)k_2\cdots k_{n-2}}_{[rts]i_2\cdots i_{n-2}}$ 将具有实本征值. 该值即是体积算符 $\hat{W}^{(n)}_{[rts]}$ 对 n 价顶角态作用的量子本征值.

自旋结网圈 S 中可以含有任意多顶点,每个顶点的价数用 n 标记. 若 S 存在于 Σ 中的区域 Ω 中时,当将 Ω 做空间立体格点分割的体积尺度参量 ε 充分小时,Ω 中的每一微小区域 v 中至多存在 S 的一个顶点,或不存在顶点. 区域 Ω 的总体积算符的本征值,将由各个微区域 v 的体积算符的本征值给出,这些微区域的体积本征值的综合贡献,给出 Ω 的总体积值. 若 Ω 内的任一微小区域中不存在自旋结网圈顶点,则该区域提供的体积算符 $\hat{W}_{I^i_\varepsilon}$ 对该自旋结网圈态的作用为零,体积算符的重耦矩阵为零矩阵,该微区域的体积(本征)值为零. 对于 Ω 中的有限区域,若其中不存在自旋结圈的顶点,则该域的体积值为零. 只有 Ω 中自旋结网圈顶点的分布处贡献区域 Ω 的体积值. 如上理论给出了时空离散量子化的定量结果.

参考文献(References)

1 Penrose R. In: Quantum Theory and beyond, ed EA Bastin, Cambridge University Press. 1971

2 Roveli C, Smolin L. Nucl. Phys., 1995, **B442**:593

3 Ashtekar A. Lectures on: Non-pertubative Canonical Gravity. Lecture Nodes Prepared in Collaboration with R.S. Tate. Singapore: World Scientific, 1991

4 Ezawa K. Phys. Rep., 1997, **286**:271

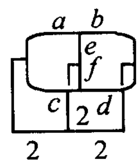
5 Rovelli C. J. Math. Phys., 2000, **141**(6):3776

6 Gambini R. Int. J. Theor. Phys., 1999, (4):1063

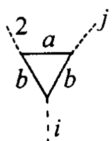
7 Pietri R D, Rovelli C. Phys. Rev., 1996, **D54**:2664

附录 A

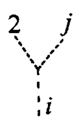
下面给出本文计算用到的重耦理论的基本公式



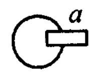
$$= \begin{Bmatrix} a & e & b \\ c & f & d \\ 2 & 2 & 2 \end{Bmatrix} \quad , \qquad (A1)$$



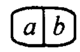
$$= \frac{\mathrm{Tet}\begin{bmatrix} i & j & a \\ b & b & 2 \end{bmatrix}}{\theta(2,i,j)}$$



$$, \qquad (A2)$$

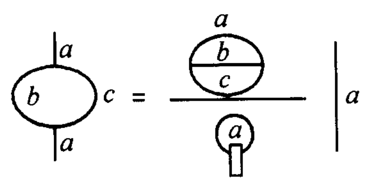


$$= \Delta^a \quad , \qquad (A3)$$



$$c = \theta(a,b,c) \quad , \qquad (A4)$$

$$\mathrm{Tet}\begin{bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{bmatrix} = \frac{\begin{Bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{Bmatrix}\theta(a,d,i)\theta(b,c,i)}{\Delta_i} \quad , \qquad (A5)$$



(A6)

Recoupling Matrix of Volume Operator Action on Vertex

SHAO Dan[1]　SHAO Liang[1]　SHAO Chang-Gui[2]　CHEN Yi-Han[2]

1 (Department of Mathematical Sciences, Ibaraki University, Mito 310-8512, Japan)

2 (Institute of Theoretical Physics, Hubei University, Wuhan 430062, China)

Abstract　We study the action of volume operator on spin network states with n-valent vertices. In particular, the recoupling matrices are re-derived by means of a graphic formulation.

Key words　spin network states, recoupling matrix, n-vertex, volume operator

Received 1 May 2003