第 29 卷 第 6 期
2005 年 6 月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.29, No.6
Jun., 2005

q 变形对相干态及其反聚束效应*

汪仲清[1,2,3;1)] 李俊红[1,2] 安广雷[1,2]

1(重庆邮电学院光电工程学院 重庆 400065)
2(重庆邮电学院信息电子学研究所 重庆 400065)
3(重庆市微电子工程重点实验室 重庆 400065)

摘要 利用 q 变形玻色产生算符和湮没算符及其逆算符的性质,引入了 q 变形的两种对相干态,研究了 q 变形对相干态的反聚束效应和两模间的关联特性.结果表明,q 变形对相干态呈现反聚束效应,两模的光子相互关联,并且 q 参数对这些非经典特性的调节比较明显,随着 q 偏离 1 越大,这些特性越明显.

关键词 q 变形 对相干态 非经典特性 反聚束效应

1 引言

近年来,量子群及其代数结构的研究在物理学的许多领域有着广泛的应用,因而引起了数学与物理学工作者的广泛重视.从数学上讲,量子代数形式上是一种准三角的霍普夫(hopf)代数.在物理方面,将量子群用于研究具体的物理问题取得了一些进展.人们发现,量子代数与物理学、数学研究的一些热门课题,例如统计可解模型[1]、量子反散射方法[2]、共形场论[3]和变形核的转动谱[4]等有着密切的联系.尤其在量子光学中,自从 Biedenharn[5]将具有李群结构的相干态推广到具有量子群结构的 q 变形相干态以来,q 相干态的统计性质和应用前景备受关注[4,6—10].

对相干态(Pair Coherent State)是一种重要的非经典态,它描述的场是一种关联双模场,可用于研究原子或离子双光子共振激发相关的系统.有关对相干态、非线性对相干态及其非经典特性的研究有过一些工作[11—13].然而,将对相干态和量子群结合得到 q 变形的对相干态,并对其性质进行研究目前尚未见报到.本文将对相干态推广到 q 变形的情况,同时研究在 q 变形的对相干态中场的反聚束效应和两模间的关联特性.

2 q 变形对相干态

q 变形玻色产生算符 a_q^+ 和湮没算符 a_q 以及数算符 N_q 构成的 q-Heisenberg 代数满足如下关系式[5]

$$a_q a_q^+ - q a_q^+ a_q = q^{-N_q}, \tag{1}$$

$$[N_q, a_q^+] = a_q^+, [N_q, a_q] = -a_q, \tag{2}$$

其中 q 为变形参数.a_q,a_q^+ 和 N_q 作用于 q-Fock 空间 $|n\rangle_q (n = 0,1,2,\cdots)$

$$a_q |n\rangle_q = \sqrt{[n]}\,|n-1\rangle_q, \tag{3}$$

$$a_q^+ |n\rangle_q = \sqrt{[n+1]}\,|n+1\rangle_q, \tag{4}$$

$$N_q |n\rangle_q = n|n\rangle_q, \tag{5}$$

符号 $[x] = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$,$|n\rangle_q$ 定义为

$$|n\rangle_q = \frac{(a_q^+)^n}{\sqrt{[n]!}}|0\rangle_q, \tag{6}$$

其中 q 阶乘 $[n]! = [n][n-1]\cdots[1]$,并且 $[0] = 1$.这样 q-Fock 空间构成一个完备的 Hilbert 空间

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle_{qq}\langle n| = I. \tag{7}$$

2004-10-10 收稿
* 国家自然科学基金(10474092,10274079)资助
1) E-mail:wangzhq@cqupt.edu.cn

将上述 q 变形玻色算符推广为双模产生算符 $a_{q,i}^{+}$ 、湮没算符 $a_{q,i}$ 和数算符 $N_{q,i}(i=1,2)$,并且满足关系

$$a_{q,i}a_{q,i}^{+}-qa_{q,i}^{+}a_{q,i}=q^{-N_{q,i}},\quad (i=1,2), \tag{8}$$

$$[N_{q,i},a_{q,i}^{+}]=a_{q,i}^{+},[N_{q,i},a_{q,i}]=-a_{q,i},\quad (i=1,2), \tag{9}$$

类似于文献[14]的讨论,可以把 $a_{q,i}$ 和 $a_{q,i}^{+}$ 写成

$$a_{q,i}=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{[n+1]}\mid n\rangle_{q.i\,q,i}\langle n+1\mid, \tag{10}$$

$$a_{q,i}^{+}=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{[n+1]}\mid n+1\rangle_{q.i\,q,i}\langle n\mid, \tag{11}$$

及其逆算符

$$a_{q,i}^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{[n+1]}}\mid n+1\rangle_{q.i\,q,i}\langle n\mid, \tag{12}$$

$$(a_{q,i}^{+})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{[n+1]}}\mid n\rangle_{q.i\,q,i}\langle n+1\mid, \tag{13}$$

$a_{q,i}^{-1},(a_{q,i}^{+})^{-1}$ 作用在 q-Fock 态上[15]

$$a_{q,i}^{-1}\mid n\rangle_{q,i}=\frac{1}{\sqrt{[n+1]}}\mid n+1\rangle_{q,i}, \tag{14}$$

$$(a_{q,i}^{+})^{-1}\mid n\rangle_{q,i}=(1-\delta_{n,0})\frac{1}{\sqrt{[n]}}\mid n-1\rangle_{q,i}, \tag{15}$$

即 $a_{q,i}^{-1}$ 和 $(a_{q,i}^{+})^{-1}$ 对 q-Fock态作用一次相当于产生(湮没)一个粒子.应用(10)—(13)式,容易证明

$$a_{q,i}a_{q,i}^{-1}=(a_{q,i}^{+})^{-1}a_{q,i}^{+}=1, \tag{16}$$

$$a_{q,i}^{-1}a_{q,i}=a_{q,i}^{+}(a_{q,i}^{+})^{-1}=1-\mid 0\rangle_{q,i\,q,i}\langle 0\mid, \tag{17}$$

这表明 $a_{q,i}$ 只有右逆而无左逆,$a_{q,i}^{+}$ 只有左逆而无右逆.利用(5)式和(12)—(13)式,还可以证明

$$N_{q,i}a_{q,i}^{-1}=a_{q,i}^{-1}(N_{q,i}+1), \tag{18}$$

$$N_{q,i}(a_{q,i}^{+})^{-1}=(a_{q,i}^{+})^{-1}(N_{q,i}-1), \tag{19}$$

将逆算符 $a_{q,i}^{-1},(a_{q,i}^{+})^{-1}$ 和数算符 $N_{q,i}$ 组合,引入下列算符

$$\begin{cases}A_{q,i}=(a_{q,i}^{+})^{-1}N_{q,i}, & (i=1,2),\\ A_{q,i}^{+}=N_{q,i}a_{q,i}^{-1}, & (i=1,2),\end{cases} \tag{20}$$

可以证明下面的关系式成立

$$[a_{q,i},A_{q,i}^{+}]=[A_{q,i},a_{q,i}^{+}]=1, \tag{21}$$

$$A_{q,i}^{+}a_{q,i}=a_{q,i}^{+}A_{q,i}=N_{q,i}, \tag{22}$$

$$[N_{q,i},A_{q,i}]=[a_{q,i}^{+}A_{q,i},A_{q,i}]=-A_{q,i}, \tag{23}$$

$$[N_{q,i},A_{q,i}^{+}]=[A_{q,i}^{+}a_{q,i},A_{q,i}^{+}]=A_{q,i}^{+}, \tag{24}$$

这表明 $A_{q,i}^{+}$ 和 $A_{q,i}$ 分别是 $a_{q,i}$ 和 $a_{q,i}^{+}$ 的正则共轭.应用(20)—(24)式可以得到 $su(1,1)$ 李代数的两个非轭密实现

$$\begin{cases}K_{-}=a_{q,1}a_{q,2},K_{+}=A_{q,1}^{+}A_{q,2}^{+},\\ K_{0}=\frac{1}{2}(N_{q,1}+N_{q,2}+1),\end{cases} \tag{25}$$

或者

$$\begin{cases}K_{-}=A_{q,1}A_{q,2},K_{+}=a_{q,1}^{+}a_{q,2}^{+},\\ K_{0}=\frac{1}{2}(N_{q,1}+N_{q,2}+1),\end{cases} \tag{26}$$

通过 $su(1,1)$ 李代数的两个非轭密实现,可以引入两类 q 变形的对相干态,它们满足

$$K_{-}\mid\xi,m\rangle_{q}=\xi\mid\xi,m\rangle_{q}, \tag{27}$$

$$(N_{q,1}-N_{q,2})\mid\xi,m\rangle_{q}=m\mid\xi,m\rangle_{q}, \tag{28}$$

在数态表象中

$$\mid\xi,m\rangle_{q,1}=C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^{n}}{\sqrt{[n]![n+m]!}}\mid n+m,n\rangle_{q}, \tag{29}$$

$$\mid\xi,m\rangle_{q,2}=D\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{[n]![n+m]!}\,\xi^{n}}{n!(n+m)!}\mid n+m,n\rangle_{q}, \tag{30}$$

其中 $\xi=\mid\xi\mid e^{i\varphi}$,归一化系数

$$C=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mid\xi\mid^{2n}}{[n]![n+m]!}\right\}^{-1/2}, \tag{31}$$

$$D=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[n]![n+m]!}{(n!(n+m)!)^{2}}\mid\xi\mid^{2n}\right\}^{-1/2}, \tag{32}$$

可以证明 $\mid\xi,m\rangle_{q,1}$ 和 $\mid\xi,m\rangle_{q,2}$ 分别是算符 $K_{-}=a_{q,1}a_{q,2}$ 和 $K_{-}=A_{q,1}A_{q,2}$ 的本征态,即

$$a_{q,1}a_{q,2}\mid\xi,m\rangle_{q,1}=\xi\mid\xi,m\rangle_{q,1}, \tag{33}$$

$$A_{q,1}A_{q,2}\mid\xi,m\rangle_{q,2}=\xi\mid\xi,m\rangle_{q,2}, \tag{34}$$

当变形参数 $q\to 1$ 时 $[n]\to n$,q 变形对相干态 $\mid\xi,m\rangle_{q,1}$ 和 $\mid\xi,m\rangle_{q,2}$ 回到通常的对相干态[12]

$$\mid\xi,m\rangle=\left[\frac{\mid\xi\mid^{m}}{I_{m}(2\mid\xi\mid)}\right]^{1/2}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^{n}}{\sqrt{n!(n+m)!}}\mid n+m,n\rangle, \tag{35}$$

其中 $I_{m}(x)$ 是虚宗量贝塞尔函数.

3 q 变形对相干态的反聚束效应

对于一般的光场,如果它的归一化二阶相关函数[16,17] $g^{(2)}(0)<1$,则称光场呈现反聚束效应.在 q 变形对相干态 $\mid\xi,m\rangle_{q,1}$ 中,定义二阶单模相干函数

$$g_{q,i}^{(2)}(0)=\frac{\langle(a_{q,i}^{+})^{2}a_{q,i}^{2}\rangle}{\mid\langle a_{q,i}^{+}a_{q,i}\rangle\mid^{2}}\quad(i=1,2), \tag{36}$$

应用(3)式,(4)式和(29)式,可以得到

$$g_{q,1}^{(2)}(0) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{[n]![n+m-2]!}}{\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{[n]![n+m-1]!}\right\}^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{[n]![n+m]!}, \tag{37}$$

$$g_{q,2}^{(2)}(0) = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{[n-2]![n+m]!}}{\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{[n-1]![n+m]!}\right\}^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{[n]![n+m]!}. \tag{38}$$

取 $m = 2$,q 参量分别取 1.0,0.8,0.6 和 0.4 对(37)式和(38)式进行数值计算(计算精度为 10^{-10}),得到 $g_{q,1}^{(2)}(0)$ 和 $g_{q,2}^{(2)}(0)$ 随 $|\xi|$ 的变化关系如图 1 和图 2 所示. 可以看出,无论 $|\xi|$ 取何值,均有 $g_{q,1}^{(2)}(0) < 1$ 和 $g_{q,2}^{(2)}(0) < 1$,即 q 变形对相干态的两个模(分别由算符 $a_{q,1}^{+}, a_{q,1}$ 和 $a_{q,2}^{+}, a_{q,2}$ 描述)均呈现反聚束效应. 并且当 $|\xi|$ 取较小值时,反聚束效应较强;随着 $|\xi|$ 逐渐增大,反聚束效应减弱. 参数 q 对反聚束效应的影响也比较明显,随着 q 偏离 1 越大(q 取值越小),反聚束效应越强.

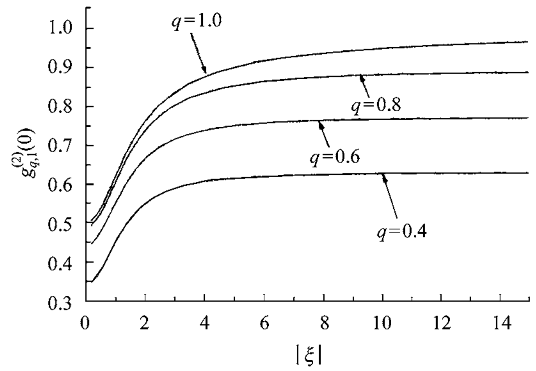

图 1 $g_{q,1}^{(2)}(0)$ 随 $|\xi|$ 的变化($m=2$)

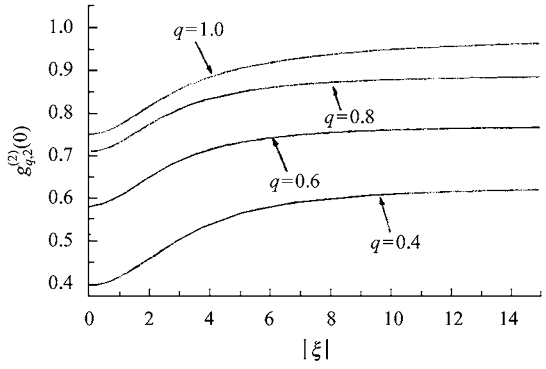

图 2 $g_{q,2}^{(2)}(0)$ 随 $|\xi|$ 的变化($m=2$)

与通常的光场一样[17],定义 q 变形对相干态两个模的模间相干度

$$g_{q,12}^{(2)}(0) = \frac{\langle a_{q,1}^{+} a_{q,1} a_{q,2}^{+} a_{q,2}\rangle}{\langle a_{q,1}^{+} a_{q,1}\rangle \langle a_{q,2}^{+} a_{q,2}\rangle}, \tag{39}$$

如果 $g_{q,12}^{(2)}(0) > 1$ 说明光场双模的光子是相关的. 应用(3)式,(4)式和(29)式,可以计算得到 q 变形对相干态的模间相干度函数为

$$g_{q,12}^{(2)}(0) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{[n-1]![n+m-1]!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{[n]![n+m]!}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{[n-1]![n+m]!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{[n]![n+m-1]!}}, \tag{40}$$

取 $m = 2$,q 参量分别取 1.0,0.8,0.6 和 0.4 对(40)式进行数值计算(计算精度为 10^{-10}),得到 $g_{q,12}^{(2)}(0)$ 随 $|\xi|$ 的变化关系如图 3 所示. 由图 3 可以看出,无论 $|\xi|$ 取何值,都有 $g_{q,12}^{(2)}(0) > 1$,说明 q 变形对相干态 $|\xi, m\rangle_{q,1}$ 两模的光子始终是相关的. 并且当 $|\xi|$ 取较小值时,相关度较大;随着 $|\xi|$ 逐渐增大,相关度减小并向 1 趋近. 参数 q 对相关函数的调节比较明显,随着 q 偏离 1 越大(q 取值越小),光场双模光子之间的关联越强.

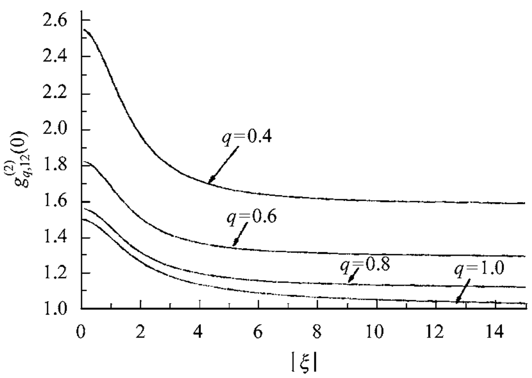

图 3 $g_{q,12}^{(2)}(0)$ 随 $|\xi|$ 的变化($m=2$)

4 结论

本文应用 q 变形玻色产生算符和湮没算符及其逆算符的性质,得到了 $su(1,1)$ 李代数的两个双模非幺密实现,由此引入了 q 变形的两种对相干态 $|\xi, m\rangle_{q,1}$ 和 $|\xi, m\rangle_{q,2}$. 研究了 q 参数取不同值时,q 变形对相干态 $|\xi, m\rangle_{q,1}$ 的反聚束效应和模间关联特性. 数值研究结果表明,无论 $|\xi|$ 取何值,q 变形对相干态 $|\xi, m\rangle_{q,1}$ 均呈现反聚束效应,两模间的光子始终是相关的. q 参数对这些效应的调节很明显,随着参数 q 偏离 1 越大,反聚束效应和两模间光子的关联越强.

参考文献(References)

1 Baxter R J. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. London: Academic Press, 1982

2 Faddeev L D. Sov. Sci. Rev. Maths., 1981, **C1**: 107

3 Belavin A A, Polyakov A M, Zamolodchikov A B. Nucl. Phys., 1984, **B241**: 333

4 FANG Xiang-Zheng, RUAN Tu-Nan. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**(3): 269 (in Chinese)
(方向正, 阮图南. 高能物理与核物理, 2000, **24**(3): 269)

5 Biedenharn L C. J. Phys., 1989, **A22**: L873

6 Chaichiur M, Ellinas D, Kullish P. Phys. Rev. Lett., 1990, **65**(8): 980

7 WANG Zhong-Qing. Acta Physica Sinica, 2001, **50**(4): 690 (in Chinese)
(汪仲清. 物理学报, 2001, **50**(4): 690)

8 WANG Zhong-Qing. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2001, **25**(10): 964 (in Chinese)
(汪仲清. 高能物理与核物理, 2001, **25**(10): 964)

9 JIANG Jun-Qin. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2003, **27**(1): 15 (in Chinese)
(江俊勤. 高能物理与核物理, 2003, **27**(1): 15)

10 WANG Zhong-Qing, ZHOU Ping et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2004, **28**(4): 365 (in Chinese)
(汪仲清,周平等. 高能物理与核物理, 2004, **28**(4): 365)

11 Agarwal G S. Phys. Rev. Lett., 1986, **57**(7): 827

12 Agarwal G S. J. Opt. Soc. Am., 1988, **B5**(9): 1940

13 SONG Tong-Qiang, ZHU Yue-Jin. Acta Optica Sinica, 2003, **23**(8): 906 (in Chinese)
(宋同强, 诸跃进. 光学学报, 2003, **23**(8): 906)

14 FAN Hong-Yi. Phys. Lett. 1994, **A191**: 347

15 WEI Lian-Fu, WANG Shun-Jin et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1997, **21**(11): 1031 (in Chinese)
(韦联福, 王顺金等. 高能物理与核物理, 1997, **21**(11): 1031)

16 Walls D F. Nature., 1983, **306**: 141

17 PENG Jin-Sheng, LI Gao-Xiang. Introduction to Modern Quantum Optics, Beijing: Science Press, 1996. 143—164 (in Chinese)
(彭金生, 李高翔. 近代量子光学导论, 北京:科学出版社, 1996. 143—164)

Pair q-Coherent States and Their Antibunching Effects*

WANG Zhong-Qing[1,2,3;1)] LI Jun-Hong[1,2] AN Guang-Lei[1,2]

1 (College of Optical and Electronic Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

2 (Institute of Applied Physics, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

3 (Key Laboratory of Micro-electronic Engineering of Chongqing, Chongqing 400065, China)

Abstract Using the properties of the q-deformed boson creation and annihilation operators and their inversed operators, two kind of q-deformed pair coherent states are introduced. Antibunching effects and correlation properties between two modes in the states are investigated. It is shown that q-deformed pair coherent states exhibit antibunching effects and the photons of the two modes are correlated. These nonclassical effects are influenced by the parameter q. These effects increase when $|\ln q|$ increases.

Key words q-deformation, pair coherent state, nonclassical property, antibunching effect

---

Received 10 October 2004

* Supported by National Natural Science Foundation of China (10474092, 10274079)

1) E-mail: wangzhq@cqupt.edu.cn