第30卷 第12期 高能物理与核物理 Vol. 30, No. 12
2006年12月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Dec., 2006

$AdS_5\otimes S^1$, $AdS_5\otimes S^5$和$AdS_2\otimes S^2$超弦模型的一种KRR参数化新方法*

蔡小琳[1)] 王晓辉 王展云 宋培 石康杰

(西北大学现代物理研究所 西安 710069)

摘要 给出了3种典型超弦模型$AdS_5\otimes S^1$, $AdS_5\otimes S^5$和$AdS_2\otimes S^2$的一种简单的KRR参数化新方法, 并结合这些超弦模型所具有的κ对称性给出了它们的卡当1-form, Maurer-Cartan方程, 作用量和运动方程.

关键词 参数化 $AdS_5\otimes S^1$ $AdS_5\otimes S^5$ $AdS_2\otimes S^2$ κ对称性

1 引言

研究超弦在一般背景中的运动有着十分重要的意义[1], 而超陪集空间中的弦运动因其有很好的对称性更是备受关注. 通常情况下, 弦模型的作用量, 运动方程等都是由群的流而不是群的参数表示出来的. 另外, 由于局域的κ对称性, 运动方程的解不能确定, 必须把它进行规范固定. 所以, 必须在群中取适当的陪集代表元, 用它们的参量写出作用量才便于对系统进行进一步的研究, 这就是对超弦的陪集模型的参数化. 超群的参数化是将超群的元素用一些数(普通数或Grassmann数)来给出, 同一超群有多种不同的参数化方法, 但由超群的不同参数化方法得到的超弦的物理量结果是相同的, 通常采用使运算方便简洁的群参数化方法来计算我们所需要的物理量.

在Kallosh, Rahmfeld, Rajaraman, 吕洪等的几篇文章中提出了在$AdS_5\otimes S^5$背景中超弦的整体对称性群$SU(2,2|4)$的一种参数化方法[2—6], 称之为KRR参数化方法, 即群元$G(x,y,\theta)=g_a(x,y)g_b(\theta)$(其中$x,y$是玻色坐标, θ是费米坐标, 下同), 并利用这种参数化方法及κ对称性得到和简化该空间中的卡当1-form以及相应的作用量[7, 8]. 这项工作非常重要, 但是他们的参数化方法运算过于繁琐, 使理论上的透明度受到影响. 本文提出了另一种方法来对超群进行KRR参数化[9], 即令群元$G(x,y,\theta)=g_1(\theta)g_2(x)g_3(y)$, 相对前一种参数化方法采用这种参数化方法会使运算大为简化, 概念上也更为清晰. 本文采用这种参数化方法首先详细分析了$AdS_5\otimes S^1$空间中的情况, 再给出了$AdS_5\otimes S^5$空间中的结果, 最后用类比的方法给出$AdS_2\otimes S^2$空间中的具体结果, 其中$AdS_5\otimes S^5$的结果与KRR参数化的结果是一致的.

2 公式和一些约定

2.1 重要公式

如果g是群元, A是相应的代数, 它们之间满足关系：$g=\mathrm{e}^A$, 则群空间的流为

$$g^{-1}\mathrm{d}g = \mathrm{d}A+\frac{1}{2!}[\mathrm{d}A,A]+\frac{1}{3!}\big[[\mathrm{d}A,A],A\big]+\frac{1}{4!}\big[[[\mathrm{d}A,A],A],A\big]+\cdots\cdots, \tag{1}$$

若两个矩阵或群元A, B不对易, 那么

$$\mathrm{e}^{-B}A^t\mathrm{e}^B=A^t+[A^t,B]+\frac{1}{2!}[[A^t,B],B]+\frac{1}{3!}[[[A^t,B],B],B]+\frac{1}{4!}\big[[[[A^t,B],B],B],B\big]+\cdots\cdots. \tag{2}$$

如果A在B的伴随(adjoint)表示中为: $[A^t,B]=A^tM$,

2006－03－13 收稿
* 国家自然科学基金(10575080)资助
1) E-mail: caixiaolin325@126.com

写成分量形式就是: $[A_i,B]=A_jM_{ji}$, 则

$$\mathrm{e}^{-B}A^t\mathrm{e}^B=A^t\mathrm{e}^M. \tag{3}$$

2.2　约定

2.2.1　$AdS_5\otimes S^1$ 背景中

$AdS_5\otimes S^1$ 背景中的超弦可以用 $SU(2,2|2)$ 陪集模型来描写, 在这种背景中, 用到的字母及其取值范围, 意义如下[10]:

$a,b=0,1,2,3,4$ 是 $so(4,1)$ 的向量指标 (AdS_5 空间), $a',b'=1,2,3$ 是 $so(3)$ 的向量指标 (S^3 空间), $\alpha,\beta=1,2,3,4$ 是 $so(4,1)$ 的旋量指标, $\alpha',\beta'=1,2$ 是 $so(3)$ 的旋量指标, $I,J,K,L=1,2$ 是另一个刻划旋量的指标, 因此, 一共有 16 个独立的旋量.

$so(4,2)$ 和 $so(3)$ Clifford 代数的生成元是 4×4 的矩阵 γ^a 和 2×2 的 $\sigma^{a'}$ 且有以下关系

$$\begin{aligned}\{\gamma^a,\gamma^b\}&=2\eta^{ab},\quad \eta^{ab}=(-++++),\\ \{\sigma^{a'},\sigma^{b'}\}&=2\eta^{a'b'},\quad \eta^{a'b'}=(+++),\end{aligned} \tag{4}$$

16×16 的 Dirac 矩阵 $\Gamma^a,\Gamma^{a'},\Gamma$ 和相应的电荷共轭矩阵 C 定义为

$$\begin{aligned}\Gamma^a&=\sigma^2\otimes\gamma^a\otimes1,\quad \Gamma^{a'}=1\otimes1\otimes\tau^{a'},\quad \Gamma=\sigma^2\otimes1\otimes1,\\ C&=\sigma^2\otimes c\otimes c',\quad \Gamma^{ab}=\frac{1}{2}[\Gamma^a,\Gamma^b].\end{aligned} \tag{5}$$

$c,c\gamma^a,c'$ 为反称矩阵, $c\gamma^{ab},c'\tau^{a'}$ 为对称矩阵, $\tau^{a'}=-\mathrm{i}\sigma^{a'},\sigma^2,\sigma^{a'}$ 是泡利矩阵, $c=(c_{\alpha\beta})$ 和 $c'=(c_{\alpha'\beta'})$ 是 $so(4,2)$ 和 $so(3)$ Clifford 代数的电荷共轭矩阵. 在上述的直乘表示中, 第一个 2×2 的矩阵 σ^2 是对应于 I,J,K,L 的指标的.

2.2.2　$AdS_5\otimes S^5$ 背景

$AdS_5\otimes S^5$ 超弦是靶空间为 $\dfrac{SU(2,2|4)}{SO(4,1)\times SO(5)}$ 的σ模型, 它的一系列约定[6]:

$a,b=0,1,2,3,4$ 是 $so(4,1)$ 的向量指标 (AdS_5 空间), $a',b'=1,2,3,4,5$ 是 $so(5)$ 的向量指标 (S^5 空间), $\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2,3,4$ 是 $so(4,1)$ 的旋量指标, $\alpha',\beta',\gamma',\delta'=1,2,3,4$ 是 $so(5)$ 的旋量指标, $I,J,K,L=1,2$ 是另一个刻划旋量的指标, 共有 32 个独立的旋量;

$$\begin{aligned}\{\gamma^a,\gamma^b\}&=2\eta^{ab},\quad \eta^{ab}=(-++++),\\ \{\gamma^{a'},\gamma^{b'}\}&=2\eta^{a'b'},\quad \eta^{a'b'}=(+++++),\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^a&=\sigma^2\otimes\gamma^a\otimes1,\quad \Gamma^{a'}=\sigma^2\otimes1\otimes\gamma^{a'},\\ C&=\sigma^2\otimes c\otimes c',\quad \Gamma^{ab}=\frac{1}{2}[\Gamma^a,\Gamma^b].\end{aligned} \tag{7}$$

c, $c\gamma^a$, c', $c'\gamma^{a'}$ 为反称矩阵, $c\gamma^{ab}$, $c'\gamma^{a'b'}$ 为对称矩阵, 该空间中这些字母的意义也可以类比 $AdS_5\otimes S^1$, 不再赘述.

2.3　$AdS_2\otimes S^2$ 背景

$AdS_2\otimes S^2$ 弦[11] 是靶空间为 $\dfrac{SU(1,1|2)}{SO(1,1)\times SO(2)}$ 的σ模型, 与 $AdS_5\otimes S^5$ 弦结构一致, 只是在维数上不同, 对 $AdS_5\otimes S^5$ 弦来说, $AdS_2\otimes S^2$ 弦更简单, 参数化的时候更容易处理. 描述 $AdS_2\otimes S^2$ 弦的代数是 $su(1,1|2)$, 如果用 $\gamma_a,\gamma^a,c,\gamma_{a'},\gamma^{a'},c'$ 代替文献[11]中 $\mathrm{i}\gamma_a\gamma,-\mathrm{i}\gamma\gamma^a,-c\gamma,-\gamma_{a'},-\gamma^{a'},c'$, 并且与这些矩阵相关的一些量也做相应的替换, 那么就可得到它的代数对易关系与 $AdS_5\otimes S^5$ 弦的代数对易关系相同[6], 因此该空间中的字母及指标的约定也与 $AdS_5\otimes S^5$ 弦类似, 只要用 $AdS_2,S^2,so(1,1),so(2)$ 代替 $AdS_5\times S^5$ 空间中的 $AdS_5,S^5,so(4,1),so(5)$, 取值范围 a,b=0, 1, $a',b'=1,2$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2$, 度规矩阵为 2×2 矩阵, $c,c\gamma^a,c',c'\gamma^{a'}$ 为对称矩阵, $c\gamma^{ab},c'\gamma^{a'b'}$ 为反称矩阵. 除此之外, 其余约定均与 $AdS_5\otimes S^5$ 空间一致.

在同一背景空间中, θ 和 Q 均指的是有相同分量的旋量, x 和 y 也应当是各自空间的矢量, 通常情况下, 这 4 个量都应当用带箭头的量来表示, 但为了书写方便, 就用不带箭头的 θ, Q, x, y 来表示旋量和矢量, $\widetilde{\theta}$, $\widetilde{Q}$ 也表示旋量. 对 Majorana 旋量 Majorana 条件为: $\overline{\Psi}=\Psi^tC$. 本文中如无特殊说明重复指标均表示求和. 在 S 背景中的带撇的阿拉伯数字其实就是不带撇的阿拉伯数字, 只是为了与 AdS 空间区分开才带上撇的.

3　$AdS_5\otimes S^1$ 空间中的参数化

3.1　$su(2,2|2)$ 代数

$AdS_5\otimes S^1$ 上的 Green-Schwarz 超弦是一个靶空间为 $\dfrac{SU(2,2|2)}{SO(4,1)\times SO(3)}$ 的σ模型, 它的整体对称性由超群 $SU(2,2|2)$ 来描述, 对应的代数是 $su(2,2|2)$, 它的代数对易关系是[10]

$$\begin{aligned}&[\hat{P}_a,\hat{P}_b]=J_{ab},\quad [\hat{P}_a,J_{bc}]=\eta_{ab}\hat{P}_c-\eta_{ac}\hat{P}_b,\\ &[T_{a'},T_{b'}]=\epsilon_{a'b'c'}T_{c'},\\ &[J_{ab},J_{cd}]=\eta_{ad}J_{bc}+\eta_{bc}J_{ad}-\eta_{ac}J_{bd}-\eta_{bd}J_{ac},\\ &\left[\hat{P}_a,Q^t\right]=\frac{1}{2}Q^t\Gamma_a,\quad [R,Q^t]=\frac{i}{2}Q^t\Gamma,\\ &[J_{ab},Q^t]=\frac{1}{2}Q^t\Gamma_{ab},\quad [T_{a'},Q^t]=\frac{1}{2}Q^t\Gamma_{a'},\\ &[Q_{I\alpha\alpha'},Q_{J\beta\beta'}]=\delta^{IJ}[-2i(c\gamma^a)_{\alpha\beta}c_{\alpha'\beta'}\hat{P}_a+\\ &2c_{\alpha\beta}c_{\alpha'\beta'}R]+\epsilon^{IJ}[(c\gamma^{ab})_{\alpha\beta}c_{\alpha'\beta'}J_{ab}-\\ &4c_{\alpha\beta}(c'\tau^{a'})_{\alpha'\beta'}T_{a'}].\end{aligned} \tag{8}$$

3.2 具体参数化方案

设超群 $SU(2,2|2)$ 的群元为 $G(x,y,\theta)$, x,y 分别是 AdS_5 和 S^1 空间中的玻色坐标, θ 是费米坐标. GS 超弦的 $AdS_5\otimes S^1$ 理论的陪集有玻色参量6(5(AdS_5部分)+1(S^1部分))个和费米参量16个(θ^1和θ^2各8个), 由于κ对称性, 其中有8个多余的费米参量, 所以陪集模型只需选剩下的8个自由的费米参量即可. 将 $su(2,2|2)$ 代数中 AdS_5 部分的生成元 $\hat{P}_a$, J_{ab} 按 $P_a=\hat{P}_a-J_{a4}(a=0,1,2,3)$ 重新组合成 $P_a,\hat{P}_4,J_{ab}$, 可以证明 P_0,P_1,P_2,P_3 互相对易但与 $\hat{P}_4$ 不对易, 即

$$[P_a,P_b]=0,\quad [\hat{P}_4,P_a]=P_a. \tag{9}$$

P_a 对 Q^t 的adjoint作用(对易关系)为

$$[Q^t,P_a]=Q^t\left(-\frac{1}{2}\Gamma_a+\frac{1}{2}\Gamma_{a4}\right). \tag{10}$$

因为 $\left(-\frac{1}{2}\Gamma_a+\frac{1}{2}\Gamma_{a4}\right)^2=0$, 所以 P_a 对 Q^t 的伴随作用是幂零的.

令陪集代表元为

$$G(x,y,\theta)=g_1(\theta)g_2(y)g_3(x)=\mathrm{e}^{\theta^tQ}\mathrm{e}^{yR}\mathrm{e}^{x^aP_a}\mathrm{e}^{\rho\hat{P}_4}, \tag{11}$$

$g_1(\theta)=\mathrm{e}^{\theta^tQ}$ 是含有费米参量的部分, $g_2(y)=\mathrm{e}^{yR}$ 是 S^1 部分, $g_3(x)=\mathrm{e}^{x^aP_a}\mathrm{e}^{\rho\hat{P}_4}$ 是 AdS_5 部分, $R=\mathrm{e}^{-\rho}$, R 是 S^1 球的半径. 因此, $AdS_5\otimes S^1$ 弦的流为

$$G^{-1}(x,y,\theta)\mathrm{d}G(x,y,\theta)=g_3^{-1}(x)g_2^{-1}(y)g_1^{-1}(\theta)\mathrm{d}g_1(\theta)\times g_2(y)g_3(x)+g_2^{-1}(y)\mathrm{d}g_2(y)+g_3^{-1}(x)\mathrm{d}g_3(x). \tag{12}$$

应用(2), (3), (9)式可得到

$$g_2^{-1}(y)\,\mathrm{d}\,g_2(y)=\mathrm{e}^{-yR}\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{yR}=\mathrm{e}^{-yR}\,\mathrm{e}^{yR}\,\mathrm{d}yR=\mathrm{d}yR, \tag{13}$$

$$g_3^{-1}(x)\,\mathrm{d}\,g_3(x)=\mathrm{e}^{-\rho}\mathrm{d}x^aP_a+\mathrm{d}\rho\hat{P}_4=\mathrm{e}^{-\rho}\,\mathrm{d}\,x^a(\hat{P}_a-J_{a4})+\mathrm{d}\rho\hat{P}_4. \tag{14}$$

引入投影算子: $P_\pm=\frac{1\pm\Gamma_4}{2}$, 它有性质

$$\begin{aligned}&\Gamma_4P_\pm=\pm P_\pm,\quad P_\pm^2=P_\pm,\quad P_\pm^t=P_\mp,\\&P_++P_-=1,\quad P_+P_-=P_-P_+=0.\end{aligned} \tag{15}$$

定义: $Q^+_{I\alpha\alpha'}=Q_{J\mu\mu'}(P_+)_{JI,\mu\alpha,\mu'\alpha'}$, 即 $Q^+_{I\alpha\alpha'}=QP_+$, 它与 $\hat{P}_4$ 的对易关系为

$$[Q^+_{I\alpha\alpha'},\hat{P}_4]=-\frac{1}{2}Q^+_{I\alpha\alpha'}, \tag{16}$$

类似可定义: $Q^-_{I\alpha\alpha'}=Q_{J\mu\mu'}(P_-)_{JI,\mu\alpha,\mu'\alpha'}$, 同样有: $[Q^-_{I\alpha\alpha'},\hat{P}_4]=\frac{1}{2}Q^-_{I\alpha\alpha'}$.

考虑费米参量 $\theta^{I\alpha\alpha'}$, 它是有16个分量的旋量(即 $I=1,2;\ \alpha=1,2,3,4;\ \alpha'=1,2$), 令 $\theta=(P_++P_-)\theta=P_+\theta+P_-\theta=\theta_++\theta_-$, 投影算子 P_+ 与 P_- 将有16个分量的旋量θ分成各为8个分量的两部分, 模型所具有的κ对称可导致8个多余的费米自由度, 因此, 可以取规范固定, 令 $P_-\theta=\theta_-=0$, 即16个分量中的8个为零, 也就是 $\Gamma_4\theta=\theta$, $\theta=P_+\theta\equiv\theta_+$, 这样, 这个动力学系统就完全确定了, 那么有

$$\begin{aligned}\theta^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}=&\theta^tQ=-Q^t\theta=-Q^t\theta_+-Q^t\theta_-=\theta_+^tQ=\\&\theta_+^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}=-{Q^+}^t\theta=\theta^{I\alpha\alpha'}Q^+_{I\alpha\alpha'},\end{aligned} \tag{17}$$

即 $g_1(\theta)=\exp(\theta^{I\alpha\alpha'}Q^+_{I\alpha\alpha'})=\exp(\theta_+^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'})$, 由(1)式可得到它的流

$$\begin{aligned}g_1^{-1}(\theta)\mathrm{d}g_1(\theta)=&\mathrm{d}\theta^{I\alpha\alpha'}Q^+_{I\alpha\alpha'}-\frac{1}{2!}\mathrm{d}\theta^{I\alpha\alpha'}\theta^{J\beta\beta'}\times\\&\{Q^+_{I\alpha\alpha'},Q^+_{J\beta\beta'}\}-\frac{1}{3!}(\mathrm{d}\theta^{I\alpha\alpha'}\theta^{J\beta\beta'}\theta^{K\gamma\gamma'})\times\\&[\{Q^+_{I\alpha\alpha'},Q^+_{J\beta\beta'}\},Q^+_{K\gamma\gamma'}]+\cdots\cdots,\end{aligned} \tag{18}$$

应用(16)式可得到上式的每一项中的生成元与 $\hat{P}_4$ 对易的本征值, 第一项应为 $-\frac{1}{2}$, 第二项应为 -1, 第三项为 $-\frac{3}{2}$, ……, 但是在李超代数的所有生成元中没有本征值比 -1 更小的, 所以(18)式从第三项开始就只能为零了, 只有前两项不为零, 这就是KRR规范固定方法的优点.

因为 $\mathrm{d}\theta^{I\alpha\alpha'}Q^+_{I\alpha\alpha'}=\mathrm{d}\theta_+^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}$, $\mathrm{d}\theta$ 也跟θ一样16个分量中只有8个是独立的, 其余分量是这8个分量的线性组合, 所以可将(18)式写成以下形式

$$\begin{aligned}g_1^{-1}(\theta)\mathrm{d}g_1(\theta)=&\mathrm{d}\theta_+^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}+\\&\frac{1}{2}\theta_+^{J\beta\beta'}\mathrm{d}\theta_+^{I\alpha\alpha'}\{Q_{I\alpha\alpha'},Q_{J\beta\beta'}\}.\end{aligned} \tag{19}$$

在所取的规范固定之下, 陪集代表元就成为

$$G(x,y,\theta)=g_1(\theta)g_2(y)g_3(x)=\mathrm{e}^{\theta_+^tQ}\mathrm{e}^{yR}\mathrm{e}^{x^aP_a}\mathrm{e}^{\rho\hat{P}_4}, \tag{20}$$

其中 $g_1(\theta)=\mathrm{e}^{\theta_+^tQ}$ 是κ规范固定后的费米部分. 将上式和(19)式代入(12)式求 $AdS_5\otimes S^1$ 模型上的流, (13)式和(14)式已分别算出了(12)式的第二项和第三项, 现在只需求出第一项就可得到(12)式的明显表达式. (12)式的第一项中 $g_1^{-1}(\theta)\mathrm{d}g_1(\theta)$ 的形式就是(19)式, 要计算这一项可直接将 $g_3^{-1}(x)g_2^{-1}(y)$ 和 $g_2(y)g_1(x)$ 作用在(19)式上应用2.1所述的规则以及(8), (10)式计算, 在计算的过程中, 主要是群元中的偶元对奇元Q的作用, 而对费米参量θ没有作用可将其直接提到式

子前面去, 计算过程如下

$$g_2^{-1}(y)Q^t g_2(y)=\mathrm{e}^{-yR}Q^t\mathrm{e}^{yR}=Q^t\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}y\Gamma}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}g_3^{-1}(x)Q^t g_3(x)=&\mathrm{e}^{-\rho\hat{P}_4}\mathrm{e}^{-x^aP_a}Q^t\mathrm{e}^{x^aP_a}\mathrm{e}^{\rho\hat{P}_4}=\\&Q^t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho\Gamma_4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^a\Gamma_a(1-\Gamma_4)}=\\&Q^t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho\Gamma_4}\left[1-\frac{1}{2}x^a\Gamma_a(1-\Gamma_4)\right],\end{aligned} \tag{22}$$

结合以上两式得到

$$\begin{aligned}&g_3^{-1}(x)g_2^{-1}(y)Q^t g_2(y)g_3(x)=\\&Q^t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho\Gamma_4}\left[1-\frac{1}{2}x^a\Gamma_a(1-\Gamma_4)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}y\Gamma}=Q^tM,\end{aligned} \tag{23}$$

这里

$$\begin{aligned}M=&\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho\Gamma_4}\left[1-\frac{1}{2}x^a\Gamma_a(1-\Gamma_4)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}y\Gamma}=e_1e_2e_3,\\e_1=&\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho\Gamma_4},\\e_2=&1-\frac{1}{2}x^a\Gamma_a(1-\Gamma_4),\\e_3=&\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}y\Gamma}.\end{aligned}$$

用这些记号可将 (23) 式简单标记, 将其分量式写出并记为 $\widetilde{Q}_{I\alpha\alpha'}$, 即

$$\begin{aligned}&g_3^{-1}(x)g_2^{-1}(y)Q_{I\alpha\alpha'}g_2(y)g_3(x)=\\&Q_{J\beta\beta'}(e_1e_2e_3)_{JI,\beta\alpha,\beta'\alpha'}\equiv\widetilde{Q}_{I\alpha\alpha'}.\end{aligned} \tag{24}$$

因此, (12) 式的第一项就可表示为

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\theta_+^{I\alpha\alpha'}\widetilde{Q}_{I\alpha\alpha'}+\frac{1}{2}\theta_+^{J\beta\beta'}\mathrm{d}\theta_+^{I\alpha\alpha'}\{\widetilde{Q}_{I\alpha\alpha'},\widetilde{Q}_{J\beta\beta'}\}=\\&\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}+\frac{1}{2}\widetilde{\theta}_+^{J\beta\beta'}\widetilde{d\theta}_+^{I\alpha\alpha'}\times\\&\big\{\delta^{IJ}[-2i(c\gamma^a)_{\alpha\beta}c_{\alpha'\beta'}\hat{P}_a+2c_{\alpha\beta}c_{\alpha'\beta'}R]+\\&\varepsilon^{IJ}[(c\gamma^{ab})_{\alpha\beta}c_{\alpha'\beta'}J_{ab}-4c_{\alpha\beta}(c'\tau^{a'}_{\alpha'\beta'})T_{a'}]\big\}.\end{aligned} \tag{25}$$

可以看出上式中记: $M\mathrm{d}\theta_+\equiv\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+$, $M\theta_+\equiv\widetilde{\theta}_+$, 但 $\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+\neq\mathrm{d}(\widetilde{\theta}_+)$.

下面来研究可使上式简化的一些性质.

1) $e_2P_+=\left[1-\frac{1}{2}x^a\Gamma_a(1-\Gamma_4)\right]\cdot\frac{1}{2}(1+\Gamma_4)=P_+$;

2) 因 P_+, Γ_4 与 e_1 和 e_3 都对易并且 $P_+\mathrm{d}\theta_+=\mathrm{d}\theta_+$, 所以: $P_+\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+=\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+$, $\Gamma_4\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+=\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+$, 同理有: $P_+\widetilde{\theta}_+=\widetilde{\theta}_+$, $\Gamma_4\widetilde{\theta}_+=\widetilde{\theta}_+$.

应用这些性质 (25) 式可变为

$$\begin{aligned}&g_3^{-1}(x)g_2^{-1}(y)g_1^{-1}(\theta)dg_1(\theta)g_2(y)g_3(x)=\\&\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}-\mathrm{i}\bar{\widetilde{\theta}}_+\Gamma^a\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+\hat{P}_a+\bar{\widetilde{\theta}}_+\Gamma\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+R+\\&\frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\widetilde{\theta}}_+\Gamma^{ab}\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+J_{ab}-2\mathrm{i}\bar{\widetilde{\theta}}_+\Gamma^{a'}\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+T_{a'},\end{aligned} \tag{26}$$

考虑 c 和 c' 都是反称矩阵, 而且有

$$\gamma^a=c^{-1}\gamma^{a^t}c,\tau^{a'}=-c'^{-1}\tau^{a'^t}c', \tag{27}$$

所以

$$\begin{aligned}&C^t=-C,\quad\Gamma^a=-C^{-1}\Gamma^{a^t}C,\quad\Gamma=-C^{-1}\Gamma^tC,\\&\Gamma^{ab}=-C^{-1}\Gamma^{ab^t}C,\quad\Gamma^{a'}=-C^{-1}\Gamma^{a'^t}C.\end{aligned} \tag{28}$$

因此对 Majorana 旋量 Ψ 有

$$\overline{M\Psi}=\overline{\Psi}M^{-1},\quad\overline{\Psi}_+=\overline{P_+\Psi_+}=\overline{\Psi}_+P_-. \tag{29}$$

如果 φ 也是旋量, A 为一矩阵, 当 $[\Gamma_4,A]=0$ 时

$$\overline{\Psi}_+A\varphi_+=\overline{\Psi}_+P_-AP_+\varphi_+=\overline{\Psi}_+AP_-P_+\varphi_+=0, \tag{30}$$

在所讨论的问题中, 矩阵 A 可以取 Γ_4, $\Gamma^{a'}$, Γ, Γ^{ab} $(a,b=0,1,2,3)$, 即

$$[\Gamma_4,\Gamma_4]=[\Gamma_4,\Gamma^{a'}]=[\Gamma_4,\Gamma]=[\Gamma_4,\Gamma^{ab}]=0, \tag{31}$$

(26) 式就简化为

$$\begin{aligned}&g_3^{-1}(x)g_2^{-1}(y)g_1^{-1}(\theta)\mathrm{d}g_1(\theta)g_2(y)g_3(x)=\\&\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}-\mathrm{i}\bar{\widetilde{\theta}}_+\Gamma^a\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+\hat{P}_a+\mathrm{i}\bar{\widetilde{\theta}}_+\Gamma^{a4}\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+J_{a4}=\\&\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}-\mathrm{i}\bar{\widetilde{\theta}}_+\Gamma^a\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+\hat{P}_a+\mathrm{i}\bar{\widetilde{\theta}}_+\Gamma^a\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+J_{a4},\end{aligned} \tag{32}$$

其中 $a=0,1,2,3$. 因为

$$e_1^{-1}\Gamma^a=\Gamma^ae_1,\quad e_2P_+=P_+, \tag{33}$$

所以

$$\overline{M\Psi}_+\Gamma^aM\varphi_+=\overline{M\Psi}_+\Gamma^{a4}M\varphi_+=\mathrm{e}^{-\rho}\overline{\Psi}_+\Gamma^a\varphi_+, \tag{34}$$

因此, (32) 式可写成

$$\begin{aligned}&g_3^{-1}(x)g_2^{-1}(y)g_1^{-1}(\theta)\mathrm{d}g_1(\theta)g_2(y)g_3(x)=\\&\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\rho}\overline{\theta}_+\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+\widehat{P}_a+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\rho}\overline{\theta}_+\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+J_{a4},\end{aligned} \tag{35}$$

上式结合 (13) 式, (14) 式就给出了 (12) 式的最简表达形式, 即

$$\begin{aligned}&G^{-1}(x,y,\theta)\mathrm{d}G(x,y,\theta)=\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}-\\&\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\rho}\overline{\theta}_+\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+\hat{P}_a+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\rho}\overline{\theta}_+\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+J_{a4}+\\&\mathrm{d}yR+\mathrm{e}^{-\rho}\mathrm{d}x^a(\hat{P}_a-J_{a4})+\mathrm{d}\rho\hat{P}_4.\end{aligned} \tag{36}$$

陪集空间中的流又可以表示成

$$\begin{aligned}L=&G^{-1}(x,y,\theta)\mathrm{d}G(x,y,\theta)\equiv L^a\hat{P}_a+L^RR+\\&\frac{1}{2}L^{ab}J_{ab}+L^{a'}T_{a'}+L^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}.\end{aligned} \tag{37}$$

$L^a, L^R, L^{ab}, L^{a'}, L^{I\alpha\alpha'}$是Cartan 1-form. 对比(36)式和(37)式, 可以得到

$$\begin{aligned} L^a &= \mathrm{e}^{-\rho}(\mathrm{d}x^a - \mathrm{i}\bar{\theta}_+\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+), \quad L^4 = \mathrm{d}\rho, \quad L^R = \mathrm{d}y, \\ L^{a4} &= \mathrm{e}^{-\rho}(\mathrm{i}\bar{\theta}_+\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+ - \mathrm{d}x^a), \quad L^{ab} = 0, \quad L^{a'} = 0, \\ L^{I\alpha\alpha'} &= \widetilde{\mathrm{d}\theta}_+^{I\alpha\alpha'} = (M\mathrm{d}\theta_+)^{I\alpha\alpha'}, \quad L = M\mathrm{d}\theta_+. \end{aligned} \tag{38}$$

3.3 Maurer-Cartan方程

在文献[10]中, $AdS_5\otimes S^1$弦所满足的Maurer-Cartan方程为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L^a &= -L^b\wedge L^{ba} - \mathrm{i}\bar{L}^I\gamma^a\wedge L^I, \\ \mathrm{d}L^R &= \bar{L}^I\wedge L^I, \\ \mathrm{d}L^I &= \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon^{IJ}(L^a\gamma^a + \mathrm{i}L^R)\wedge L^J - \\ &\quad \frac{1}{4}(L^{ab}\gamma^{ab} + 2L^{a'}\tau^{a'})\wedge L^I, \\ &\quad \cdots \end{aligned} \tag{39}$$

在本文的约定下, 以上的方程就应当改写为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L^a &= -L^b\wedge L^{ba} - \mathrm{i}\bar{L}\Gamma^a\wedge L, \\ \mathrm{d}L^R &= \bar{L}\Gamma\wedge L, \\ \mathrm{d}L &= -\frac{1}{2}L^a\Gamma^a\wedge L - \frac{\mathrm{i}}{2}L^R\Gamma\wedge L - \\ &\quad \frac{1}{2}L^{a4}\Gamma^{a4}\wedge L - \frac{1}{2}L^{a'}\Gamma^{a'}\wedge L, \\ &\quad \cdots \end{aligned} \tag{40}$$

以下举例来检验(38)式的Cartan 1-form是否满足(40)式所述的Maurer-Cartan方程, 将对(38)式的L^a, L^4, L^{a4}, L^{ab}, L^R, L求外微分得到的式子与将其代入(40)式得到的式子比较, 如果二者相等, 则证明(40)式的Maurer-Cartan方程成立, 否则就不成立.

当$a\neq 4$时, 对L^a的外微分为

$$\mathrm{d}L^a = -\mathrm{e}^{-\rho}\mathrm{d}\rho\wedge(\mathrm{d}x^a - \mathrm{i}\bar{\theta}_+\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+) - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\rho}\overline{\mathrm{d}\theta}_+\Gamma^a\wedge d\theta_+, \tag{41}$$

将(38)式代入(40)式得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L^a &= -L^b\wedge L^{ba} - \mathrm{i}\bar{L}\Gamma^a\wedge L = -L^4\wedge L^{4a} - \mathrm{i}\bar{L}\Gamma^a\wedge L = \\ &\quad -\mathrm{d}\rho\mathrm{e}^{-\rho}\wedge(\mathrm{d}x^a - \mathrm{i}\bar{\theta}_+\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+) - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\rho}\overline{\mathrm{d}\theta}_+\Gamma^a\wedge\mathrm{d}\theta_+. \end{aligned} \tag{42}$$

很显然(41)式和(42)式是相等的, 也就是说当$a\neq 4$时(40)式的第一式是成立的, 同理可证明$a=4$时这个式子也是成立的, 因此(40)式的第一式成立.

又知$\mathrm{d}L^R = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = 0$, 因为$\Gamma$, Γ^a, Γ^4与Γ是对易的, 而M又是Γ^a, Γ^4和Γ的函数, 所以Γ也和M是对易的, 再应用θ_+的性质, 就可得到

$$\mathrm{d}L^R = \bar{L}\Gamma\wedge L = \overline{M\mathrm{d}\theta}_+\Gamma\wedge M\mathrm{d}\theta_+ = \overline{\mathrm{d}\theta}_+\Gamma\wedge\mathrm{d}\theta_+ = 0. \tag{43}$$

因此(40)式的第二式也成立.

现在来检验(40)式的第三式是否成立. 我们知道

$$L = M\mathrm{d}\theta_+, \mathrm{d}L = \mathrm{d}M\wedge\mathrm{d}\theta_+ = \mathrm{d}MM^{-1}\wedge M\mathrm{d}\theta_+, \tag{44}$$

$\mathrm{d}MM^{-1}$的计算如下

$$\begin{aligned} \mathrm{d}MM^{-1} &= \mathrm{d}e_1e_1^{-1} + e_1\mathrm{d}e_2e_2^{-1}e_1^{-1} + \mathrm{d}e_3e_3^{-1}, \\ \mathrm{d}e_1e_1^{-1} &= -\frac{1}{2}L^4\Gamma_4, \\ e_1\mathrm{d}e_2e_2^{-1}e_1^{-1} &= -\frac{1}{2}(L^a\Gamma_a + L^{a4}\Gamma_{a4}) + \\ &\quad \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-\rho}\bar{\theta}_+\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+(\Gamma_{a4} - \Gamma_a) \equiv \\ &\quad -\frac{1}{2}(L^a\Gamma_a + L^{a4}\Gamma_{a4}) + \Delta_f, \\ \mathrm{d}e_3e_3^{-1} &= -\frac{\mathrm{i}}{2}L^R\Gamma, \Gamma_4M\mathrm{d}\theta_+ = M\mathrm{d}\theta_+, \end{aligned} \tag{45}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L &= \mathrm{d}MM^{-1}\wedge M\mathrm{d}\theta_+ = -\frac{1}{2}L^4\Gamma_4\wedge L - \\ &\quad \frac{1}{2}(L^a\Gamma_a + L^{a4}\Gamma_{a4})\wedge L + \Delta_f\wedge L - \frac{\mathrm{i}}{2}L^R\Gamma\wedge L, \end{aligned} \tag{46}$$

由(45)式的最后一式可证明$\Delta_f\wedge L = 0$, 将这个结果带入(46)式, 便有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L &= \mathrm{d}MM^{-1}\wedge M\mathrm{d}\theta_+ = -\frac{1}{2}L^4\Gamma_4\wedge L - \\ &\quad \frac{1}{2}(L^a\Gamma_a + L^{a4}\Gamma_{a4})\wedge L - \frac{\mathrm{i}}{2}L^R\Gamma. \end{aligned} \tag{47}$$

因为$L^{a'} = 0$, 所以上式与(40)式的第三式相等, 即(40)式的第三式成立.

到此为止就检验了在我们所取的参数化下得到的beins和联络满足Maurer-Cartan方程.

3.4 作用量

下面给出在这种参数化下的$SU(2,2|2)$陪集模型的作用量. 作用量S为[10]

$$S = S_{\mathrm{kin}} + S_{\mathrm{WZ}}, \tag{48}$$

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{kin}} &= -\frac{1}{2}\int\sqrt{-g}\,g^{ij}(L_i^aL_j^a + L_i^4L_j^4 + L_i^RL_j^R)\mathrm{d}^2\sigma = \\ &\quad -\frac{1}{2}\int\sqrt{-g}\,g^{ij}R^2(\partial_i x^a - \mathrm{i}\bar{\theta}_+\Gamma^a\partial_i\theta_+)\times \\ &\quad (\partial_j x^a - \mathrm{i}\bar{\theta}_+\Gamma^a\partial_j\theta_+)\mathrm{d}^2\sigma - \\ &\quad \frac{1}{2}\int\sqrt{-g}\,g^{ij}\left(\frac{\partial_i R}{R}\cdot\frac{\partial_j R}{R} + \partial_i y\partial_j y\right)\mathrm{d}^2\sigma, \end{aligned} \tag{49}$$

球坐标下的二维平面上半径为R的圆上的点的坐标可表示为

$$t_1=R\cos y,\quad t_2=R\sin y, \tag{50}$$

则

$$\mathrm{d}t_1=\mathrm{d}R\cos y-R\sin y\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}t_2=\mathrm{d}R\sin y+R\cos y\mathrm{d}y, \tag{51}$$

设圆上的法线方向为$\boldsymbol{n}=(\cos y,\sin y)=(n_1,n_2)$, 所以: $t_j=Rn_j$, 有(注意$L^R=\mathrm{d}y$)

$$\mathrm{d}t_j=\mathrm{d}Rn_j+R\frac{\partial n_j}{\partial y}\mathrm{d}y=R\left(N_{j2}\frac{\mathrm{d}R}{R}+N_{j1}L^R\right), \tag{52}$$

其中: $N_{j2}=n_j$, $N_{j1}=\dfrac{\partial n_j}{\partial y}$, 易得: $N_{jk}N_{jk'}=\delta_{kk'}$, 即$N$是一个正交的$2\times2$的矩阵.

$\mathrm{d}t_j$在微分底流形上的分量为

$$(\mathrm{d}t_j)_{\sigma^\alpha}=R\left[N_{j2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{R}\right)_{\sigma^\alpha}+N_{j1}L^R_{\sigma^\alpha}\right], \tag{53}$$

两个分量的乘积为

$$(\mathrm{d}t_j)_{\sigma^\beta}(\mathrm{d}t_j)_{\sigma^\alpha}=R^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}R}{R}\right)_\beta\left(\frac{\mathrm{d}R}{R}\right)_\alpha+L^R_\beta L^R_\alpha\right], \tag{54}$$

所以

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{R}\right)_\beta\left(\frac{\mathrm{d}R}{R}\right)_\alpha+L^R_\beta L^R_\alpha=\frac{1}{R^2}(\mathrm{d}t_j)_\beta(\mathrm{d}t_j)_\alpha, \tag{55}$$

因此

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{kin}}=&-\frac{1}{2}\int\sqrt{-g}\,g^{ij}R^2(\partial_i x^a-\mathrm{i}\overline{\theta}_+\varGamma^a\partial_i\theta_+)\times\\&(\partial_j x^a-\mathrm{i}\overline{\theta}_+\varGamma^a\partial_j\theta_+)\mathrm{d}^2\sigma-\\&\frac{1}{2}\int\sqrt{-g}\,g^{ij}\frac{1}{R^2}(\partial_i t_l\partial_j t_l)\mathrm{d}^2\sigma.\end{aligned} \tag{56}$$

作用量的Wess-Zumino项为[10]

$$S_{\mathrm{WZ}}=-2\int\overline{L}^1\wedge L^2, \tag{57}$$

在本文的约定下为

$$S_{\mathrm{WZ}}=-\int\overline{L}(-\mathrm{i}\sigma^3\otimes1\otimes1)\wedge L, \tag{58}$$

应用e_1,e_2,e_3之间以及它们与$-\mathrm{i}\sigma^3\otimes1\otimes1$, $\mathrm{d}\theta_+$之间的关系, 可得到

$$S_{\mathrm{WZ}}=-\int R\overline{\mathrm{d}\theta}_+(\cos y+\mathrm{i}\varGamma\sin y)(-\mathrm{i}\sigma^3\otimes1\otimes1)\wedge\mathrm{d}\theta_+, \tag{59}$$

引入新的参数: $\widehat{\varGamma}_1=-\sigma^1\otimes\gamma_4\otimes1$, $\widehat{\varGamma}_2=(\mathrm{i}\sigma^1\otimes1\otimes1)$, 用这两个参数与$t$, S_{WZ}为

$$S_{\mathrm{WZ}}=-\int\overline{\mathrm{d}\theta}_+(t^1\widehat{\varGamma}_1+t^2\widehat{\varGamma}_2)\wedge\mathrm{d}\theta_+, \tag{60}$$

分部积分之后

$$S_{\mathrm{WZ}}=\int\epsilon^{ij}\overline{\theta}_+\partial_i t^l\widehat{\varGamma}_l\partial_j\theta_+\mathrm{d}^2\sigma. \tag{61}$$

因此

$$\begin{aligned}S=&S_{\mathrm{kin}}+S_{\mathrm{WZ}}=\\&-\frac{1}{2}\int\sqrt{-g}\,g^{ij}R^2[(\partial_i x^a-\mathrm{i}\overline{\theta}_+\varGamma^a\partial_i\theta_+)\times\\&(\partial_j x^a-\mathrm{i}\overline{\theta}_+\varGamma^a\partial_j\theta_+)]\mathrm{d}^2\sigma-\\&\frac{1}{2}\int\sqrt{-g}\,g^{ij}\frac{1}{R^2}(\partial_i t^l\partial_j t_l)\mathrm{d}^2\sigma+\\&\int\epsilon^{ij}\overline{\theta}_+\partial_i t^l\widehat{\varGamma}_l\partial_j\theta_+\mathrm{d}^2\sigma.\end{aligned} \tag{62}$$

这就是$AdS_5\otimes S^1$弦在采用的参数化下的作用量形式, 对该作用量取变分便可得到这种弦的运动方程

$$\begin{aligned}&\partial_i(\sqrt{-g}\,g^{ij}L^a_j)+\sqrt{-g}\,g^{ij}L^{ab}_iL^b_j+\\&\mathrm{i}\epsilon^{ij}\overline{L}_i\varGamma^a(\sigma^3\otimes1\otimes1)L_j=0,\end{aligned} \tag{63}$$

$$\partial_i(\sqrt{-g}\,g^{ij}L^R_j)-\epsilon^{ij}\overline{L}_i\varGamma(\sigma^3\otimes1\otimes1)L_j=0, \tag{64}$$

$$[\sqrt{-g}\,g^{ij}L^a_i\varGamma^a-\epsilon^{ij}(L^4_i\varGamma^4+\mathrm{i}L^R_i\varGamma)(\sigma^3\otimes1\otimes1)]L_j=0, \tag{65}$$

$$L^a_iL^a_j+L^R_iL^R_j-\frac{1}{2}g_{ij}g^{kl}(L^a_kL^a_l+L^R_kL^R_l)=0. \tag{66}$$

(63), (64)两式是对作用量取x^a, ρ和y变分得到的, 它们与规范固定以前的方程是一致的, 然而对θ的变分给出的方程(65)却与规范固定前的不同, 这是由于超弦规范固定时费米自由度少了一半, 相当于原方程前面加投影算子P_-以后的结果, 关于这个情况, 我们今后还要进一步讨论. 作用量对g_{ij}的变分得到的方程仍然是与规范固定前一致, 即(66)式, 这就是Virasoro约束方程.

4　$\boldsymbol{AdS_5\otimes S^5}$弦

这个模型的对称性由$su(2,2|4)$代数来描写, 它与$AdS_5\otimes S^1$的AdS部分完全一致, 所不同的只是S部分的维数不同, 因此参数化的时候也只有S部分有差异, $AdS_5\otimes S^5$比$AdS_5\otimes S^1$稍微复杂一些, 但是处理的方法大体一致, 下面不做详细推导只给出$AdS_5\otimes S^5$的结果, 这个结果与KRR的结果是一致的[4, 7].

MT模型由玻色参量$5+5$个, 费米参量32个, 由于κ对称性, 可令16个费米参量为零[6], 因而, 可令它

的陪集代表元为

$$G(x,y,\theta) = g_1(\theta)g_2(y)g_3(x) = \\ \mathrm{e}^{\theta_+^t Q}\prod_{a'=1}^{4}\mathrm{e}^{y_{a'}J_{a'a'+1}}\mathrm{e}^{y_5\hat{P}_{5'}}\mathrm{e}^{x^a P_a}\mathrm{e}^{\rho\hat{P}_4}, \quad (67)$$

式中$g_1(\theta)=\mathrm{e}^{\theta_+^t Q}$是$\kappa$规范固定后的费米部分, $\theta_+ = \frac{1}{2}(1+\Gamma_4)\theta_+$; $g_2(y) = \prod_{a'=1}^{4}\mathrm{e}^{y_{a'}J_{a'a'+1}}\mathrm{e}^{y_5\hat{P}_{5'}}$是$S^5$部分, $g_3(x)=\mathrm{e}^{x^a P_a}\mathrm{e}^{\rho\hat{P}_4}$是$AdS_5$部分. 该模型的流为

$$G^{-1}(x,y,\theta)\mathrm{d}G(x,y,\theta) = \\ g_3^{-1}(x)g_2^{-1}(y)g_1^{-1}(\theta)\mathrm{d}g_1(\theta)g_2(y)g_3(x) + \\ g_2^{-1}(y)\mathrm{d}g_2(y)+g_3^{-1}(x)\mathrm{d}g_3(x). \quad (68)$$

由$su(2,2|4)$代数的对易关系[6]及Γ矩阵的性质可得到

$$g_3^{-1}(x)g_2^{-1}(y)g_1^{-1}(\theta)\mathrm{d}g_1(\theta)g_2(y)g_3(x)=\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'} - \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\rho}\overline{\theta}_+\sum_{a=0}^{3}\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+\hat{P}_a+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\rho}\overline{\theta}_+\sum_{a=0}^{3}\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+J_{a4}, \\ g_2^{-1}(y)\mathrm{d}g_2(y)=\sum_{a'=1}^{5}\prod_{k=a'+1}^{5}\sin y_k\mathrm{d}y_{a'}\hat{P}_{a'} + \\ \sum_{a'\lneqq b'}^{5}\prod_{k=a'+1}^{b'-1}\sin y_k\cos y_{b'}\mathrm{d}y_{a'}J_{a'b'}, \quad (69) \\ g_3^{-1}(x)\mathrm{d}g_3(x)=\mathrm{e}^{-\rho}\mathrm{d}x^aP_a+\mathrm{d}\rho\hat{P}_4 = \\ \mathrm{e}^{-\rho}\mathrm{d}x^a(\hat{P}_a-J_{a4})+\mathrm{d}\rho\hat{P}_4.$$

流的具体表达式为

$$G^{-1}(x,y,\theta)\mathrm{d}G(x,y,\theta)=\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'} - \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\rho}\overline{\theta}_+\sum_{a=0}^{3}\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+\hat{P}_a+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\rho}\overline{\theta}_+\sum_{a=0}^{3}\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+J_{a4} + \\ \sum_{a'=1}^{5}\prod_{k=a'+1}^{5}\sin y_k\mathrm{d}y_{a'}\hat{P}_{a'} + \\ \sum_{a'\lneqq b'}^{5}\prod_{k=a'+1}^{b'-1}\sin y_k\cos y_{b'}\mathrm{d}y_{a'}J_{a'b'} + \\ \mathrm{e}^{-\rho}\mathrm{d}x^a(\hat{P}_a-J_{a4})+\mathrm{d}\rho\hat{P}_4. \quad (70)$$

又知$AdS_5\otimes S^5$空间中的流还可表示为

$$L = G^{-1}(x,y,\theta)\mathrm{d}G(x,y,\theta)\equiv L^a\hat{P}_a+L^{a'}\hat{P}_{a'} + \\ \frac{1}{2}L^{ab}J_{ab}+\frac{1}{2}L^{a'b'}J_{a'b'}+L^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}, \quad (71)$$

所以

$$L^a=\mathrm{e}^{-\rho}(\mathrm{d}x^a-\mathrm{i}\overline{\theta}_+\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+), \quad L^4=\mathrm{d}\rho, \\ L^{a4}=\mathrm{e}^{-\rho}(\mathrm{i}\overline{\theta}_+\Gamma^a\mathrm{d}\theta_+-\mathrm{d}x^a), \quad L^{ab}=0, \\ L^{a'}=\prod_{k=a'+1}^{5}\sin y_k\mathrm{d}y_{a'}, \quad L^{a'b'}=\prod_{k=a'+1}^{b'-1}\sin y_k\cos y_{b'}\mathrm{d}y_{a'}, \quad (72)$$

$$L=\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+=M\mathrm{d}\theta_+, \\ M=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho\Gamma_4}\left[1-\frac{1}{2}x^a\Gamma_a(1-\Gamma_4)\right]\times \\ \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}y_5\Gamma_{5'}}\prod_{a'=4}^{1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y_{a'}\Gamma_{a'a'+1}}$$

检验它们是否满足以下Maurer-Cartan方程:

AdS_5部分为

$$\mathrm{d}L^a = -L^b\wedge L^{ba}-\mathrm{i}\overline{L}\Gamma^a\wedge L, \\ \mathrm{d}L^{ab} = -L^a\wedge L^b-L^{ac}\wedge L^{cb}+\mathrm{i}\overline{L}\Gamma^{ab}\wedge L, \quad (73)$$

因为$\overline{L}\Gamma^{a'}\wedge L=\overline{L}\Gamma^{a'b'}\wedge L=0$, S^5部分为

$$\mathrm{d}L^{a'} = -L^{b'}\wedge L^{b'a'}, \\ \mathrm{d}L^{a'b'} = L^{a'}\wedge L^{b'}-L^{a'c'}\wedge L^{c'b'}, \\ \mathrm{d}L = -\frac{1}{2}L^a\Gamma^a\wedge L-\frac{i}{2}L^{a'}\Gamma^{a'}\wedge L - \\ \frac{1}{2}L^{a4}\Gamma^{a4}\wedge L-\frac{1}{4}L^{a'b'}\Gamma^{a'b'}\wedge L. \quad (74)$$

经检验, 这些式子都成立, 因此参数化的结果是满足Maurer-Cartan方程的.

同样, 还可以得到这种超弦模型的作用量的参数化形式

$$S=S_{\mathrm{kin}}+S_{\mathrm{WZ}}=-\frac{1}{2}\int\sqrt{-g}\,g^{ij}R^2[(\partial_i x^a-\mathrm{i}\overline{\theta}_+\Gamma^a\partial_i\theta_+)\times \\ (\partial_j x^a-\mathrm{i}\overline{\theta}_+\Gamma^a\partial_j\theta_+)+\frac{1}{R^2}\partial_i t_l\partial_j t_l]\mathrm{d}^2\sigma + \\ \int\epsilon^{ij}\overline{\theta}_+\partial_i t_l\widehat{\Gamma}_l\partial_j\theta_+\mathrm{d}^2\sigma. \quad (75)$$

上式中$R=\mathrm{e}^{-\rho}$是S^5球面的半径, $l=0,1,\cdots,6$, $\widehat{\Gamma}_{j'}=\mathrm{i}\sigma^1\otimes 1\otimes\gamma_{j'}(j'=1,\cdots,5)$是$S^5$部分, $\widehat{\Gamma}_6=-\sigma^1\otimes\gamma_4\otimes 1$; $t_l=R\prod_{k=l}^{5}\sin y_k\cos y_{(l-1)}$ $(l=2,3,4,5,6)$, $t_1=R\prod_{k=1}^{5}\sin y_k$, $\sum_{l=1}^{6}t_l^2=R^2$, $\boldsymbol{t}=(t_6,t_5,t_4,t_3,t_2,t_1)$是6维空间半径为$R$的5维球面上的点, 当$R$固定时嵌入到6维平直空间中的5维球面上的点可由$(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)$来刻划.

这就是KRR的结果[4, 7], 只是关于θ_+的定义的不同, 而本文的推导要比他们简单明了.

5　$AdS_2\otimes S^2$ 弦

按照本文的约定, 可以得到 $AdS_2\otimes S^2$ 弦与 $AdS_5\otimes S^5$ 弦的代数对易关系式是相同的, 因此应用这代数对易关系式得到的beins和联络, Maurer-Cartan方程以及作用量等都相同, 只是相应指标的取值范围不同. 以下简略给出这种模型上的结果.

模型上的陪集代表元为

$$G(x,y,\theta) = g_1(\theta)g_2(y)g_3(x)= \mathrm{e}^{\theta_+^t Q}\mathrm{e}^{y_1 J_{1'2'}}\mathrm{e}^{y_2\hat{P}_{2'}}\mathrm{e}^{x^0 P_0}\mathrm{e}^{\rho\hat{P}_1}, \tag{76}$$

流为

$$\begin{aligned}&G^{-1}(x,y,\theta)\mathrm{d}G(x,y,\theta)=\\&g_3^{-1}(x)g_2^{-1}(y)g_1^{-1}(\theta)\mathrm{d}g_1(\theta)g_2(y)g_3(x)+g_2^{-1}(y)\mathrm{d}g_2(y)+\\&g_3^{-1}(x)\mathrm{d}g_3(x)=\widetilde{\mathrm{d}\theta}_+^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\rho}\overline{\theta}_+\Gamma^0\mathrm{d}\theta_+\hat{P}_0+\\&\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\rho}\overline{\theta}_+\Gamma^{01}\mathrm{d}\theta_+J_{01}+\mathrm{d}y_1(\cos y_2 J_{1'2'}+\sin y_2\hat{P}_{1'})+\\&\mathrm{d}y_2\hat{P}_{2'}+\mathrm{e}^{-\rho}\mathrm{d}x^0(\hat{P}_0-J_{01})+\mathrm{d}\rho\hat{P}_1=L^a\hat{P}_a+L^{a'}\hat{P}_{a'}+\\&\frac{1}{2}L^{ab}J_{ab}+\frac{1}{2}L^{a'b'}J_{a'b'}+L^{I\alpha\alpha'}Q_{I\alpha\alpha'}.\end{aligned} \tag{77}$$

所以

$$\begin{aligned}L^0 &= \mathrm{e}^{-\rho}(\mathrm{d}x^0-\mathrm{i}\overline{\theta}_+\Gamma^0\mathrm{d}\theta_+),\quad L^1=\mathrm{d}\rho,\\L^{1'} &= \mathrm{d}y_1\sin y_2,\quad L^{2'}=\mathrm{d}y_2,\\L^{01} &= \mathrm{e}^{-\rho}(\mathrm{i}\overline{\theta}_+\Gamma^0\mathrm{d}\theta_+-\mathrm{d}x^0),\\&\quad L^{1'2'}=\mathrm{d}y_1\cos y_2,\\L &= M\mathrm{d}\theta_+,\\M &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho\Gamma_4}\left[1-\frac{1}{2}x^0\Gamma_0(1-\Gamma_1)\right]\times\\&\quad\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}y_2\Gamma_{2'}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y_1\Gamma_{1'2'}}.\end{aligned} \tag{78}$$

要检验它们是否满足Maurer-Cartan方程, 只要检验

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L^a &= -L^b\wedge L^{ba}-\mathrm{i}\overline{L}\Gamma^a\wedge L,\\\mathrm{d}L^{ab} &= -L^a\wedge L^b+\mathrm{i}\overline{L}\Gamma^{ab}\wedge L,\\\mathrm{d}L^{a'} &= -L^{b'}\wedge L^{b'a'},\mathrm{d}L^{a'b'}=L^{a'}\wedge L^{b'},\\\mathrm{d}L &= -\frac{1}{2}L^a\Gamma^a\wedge L-\frac{\mathrm{i}}{2}L^{a'}\Gamma^{a'}\wedge L-\\&\quad\frac{1}{4}L^{ab}\Gamma^{ab}\wedge L-\frac{1}{4}L^{a'b'}\Gamma^{a'b'}\wedge L.\end{aligned} \tag{79}$$

经检验, 这些式子都满足. 因此, 参数化的结果是自洽的.

该模型的作用量在这种参数化下可写成

$$\begin{aligned}S=&S_{\mathrm{kin}}+S_{\mathrm{WZ}}=-\frac{1}{2}\int\sqrt{-g}\,g^{ij}R^2\times\\&[(\partial_i x^0-\mathrm{i}\overline{\theta}_+\Gamma^0\partial_i\theta_+)(\partial_j x^0-\mathrm{i}\overline{\theta}_+\Gamma^0\partial_j\theta_+)+\\&\frac{1}{R^2}\partial_i t^l\partial_j t^l]\mathrm{d}^2\sigma+\\&\int\epsilon^{ij}\overline{\theta}_+\partial_i t^l\widehat{\Gamma}_l\partial_j\theta_+\mathrm{d}^2\sigma.\end{aligned} \tag{80}$$

式中 $R=\mathrm{e}^{-\rho}$ 是 S^2 球的半径, $l=1,2,3$, $\widehat{\Gamma}_{j'}=\mathrm{i}\sigma^1\otimes 1\otimes\gamma_{j'}$ $(j'=1,2)$ 是 S^2 部分, $\widehat{\Gamma}_3=-\sigma^1\otimes\gamma_1\otimes 1$; $t_1=R\sin y_2\sin y_1$, $t_2=R\sin y_2\cos y_1$, $t_3=R\cos y_2$, $\sum\limits_{l=1}^{6}t_l^2=R^2$, $t=(t_3,t_2,t_1)$ 是3维空间半径为 R 的2维球面上的点, 当 R 固定时嵌入到3维平直空间中的2维球面上的点可由 (y_1,y_2) 来刻划.

6　讨论

本文提出了一种与Kallosh, Rahmfeld, Rajaraman, 吕洪等所采用的具体方法不同的参数化方法, 得到与KRR参数化一致的结果, 采用这种参数化将会使超弦模型的一系列运算更简单, 同时还利用超弦模型所具有的 κ 对称性对其卡当1-form和作用量等进行简化. 文中, 以超弦中3种典型的模型 ($AdS_5\otimes S^1$, $AdS_5\otimes S^5$, $AdS_2\otimes S^2$) 为例来充分说明这种参数化的方法和结果.

参考文献(References)

1 XIONG Chuan-Hua. Acta Physica Sinica, 2005, **54**(1): 47(in Chinese)
(熊传华. 物理学报, 2005, **54**(1): 47)

2 Kallosh R, Rahmfeld J, Rajaraman A. Near Horizon Superspace. arXiv:hep-th/9805217

3 Kallosh R. Superconformal Actions in Killing Gauge. arXiv:hep-th/9807206

4 Kallosh R, Rahmfeld J. The GS String Action on $AdS_5 \times S^5$. arXiv:hep-th/9808038

5 LÜ Hong, Pope C N, Rahmfeld J. A Construction of Killing Spinors on S^n. arXiv:hep-th/9805151

6 Metsaev R R, Tseylin A A. Type IIB Superstring Action in $AdS_5 \times S^5$ Background. arxiv:hep-th/9805028

7 Kallosh R, Tseylin A A. Simplifying Superstring Action on $AdS_5 \times S^5$. arXiv:hep-th/9808088

8 Rahmfeld J, Rajaraman A. The GS String Action on $AdS_3 \times S^3$ with Ramond-Ramond Charge. arXiv:hep-th/9809164

9 Alday L F, Arutyunov G, Frolov S. New Integrable System of 2dim Fermions from Strings on $AdS_5 \times S^5$. arXiv:hep-th/0508140

10 CHEN Bin, HE Ya-Li, ZHANG Peng et al. Flat Currents of the Green-Schwarz Superstrings in $AdS_5 \times S^1$ and $AdS_3 \times S^3$ Backgrounds. arXiv:hep-th/0503089

11 ZHOU Jian-Ge. Super 0-brane and GS Superstring Actions on $AdS_2 \times S^2$. arXiv:hep-th/9906013

A New KRR Parametrising Method of Superstring Models of $AdS_5 \otimes S^1$, $AdS_5 \otimes S^5$ and $AdS_2 \otimes S^2$ *

CAI Xiao-Lin[1)] WANG Xiao-Hui WANG Zhan-Yun SONG Pei SHI Kang-Jie

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract A new KRR parametrizing method of three typical superstring models of $AdS_5 \otimes S^1$, $AdS_5 \otimes S^5$ and $AdS_2 \otimes S^2$ is given, and combining with κ symmetry they have, their Cartan 1-forms, Maurer-Cartan equations, actions and motion equations are given.

Key words parametrization, $AdS_5 \otimes S^1$, $AdS_5 \otimes S^5$, $AdS_2 \otimes S^2$, κ symmetry

Received 13 March 2006

* Supported by NSFC (10575080)

1) E-mail: caixiaolin325@126.com