第 30 卷 第 9 期 高 能 物 理 与 核 物 理 Vol. 30, No. 9
2006 年 9 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sep., 2006

Loop代数上一种Toda力学系统的求解问题

朱桥[1;1)] 杨战营[2] 石康杰[3] 温俊青[4]

1 (陕西科技大学理学院 咸阳 712081)
2 (西北大学物理系 西安 710069)
3 (西北大学现代物理所 西安 710069)
4 (西安石油大学理学院 西安 710065)

摘要 研究Loop代数上的一种Toda系统$\dot{L}=[L,M]$, 其Lax Pair中的M是反对称矩阵, 而$L=L^{+}+M$, L^{+}是准上三角矩阵(包含对角部分), 证明这种系统的Lax方程的求解问题与相关的正则Riemann-Hilbert问题等价. 按此方法, 发现在某些特定的初值条件下系统是可积的. 并给出实例求解这一问题, 得到了精确解.

关键词 Toda多体力学系统 Lax Pair Riemann-Hilbert问题

1 引言

多体力学系统相互作用是继两体问题之后理论力学领域的又一热点问题. 因为它与诸如长程相关、非线性波的传播[1]、霍尔效应[2]、孤子理论[3—5]以及反散射方法[6]等多个领域的问题相关, 所以长期以来一直为理论物理学家和数学家所关注, 并有着突破性的进展: 大量一维精确可解多体系统被发现, 其中著名的有Toda链[7], Calogero-Moser模型[8]和Ruijsenaars-Schneider模型[9].

Toda模型起初只考虑多体间的近邻相互作用, 后来侯伯宇和赵柳等人研究了次近邻相互作用, 得到不断的推广. 刘王云等又以经典李代数为背景, 对一维对称Toda链进行研究[10]. 他们在总结原始Toda晶格Lax矩阵的数学性质的基础上, 在对称的L矩阵中引入更多的非对角变量, 将Toda晶格推广至准长程相互作用的情形, 给出精确求解的办法. 而与经典李代数情形相比, 以Loop代数为基础的多体力学系统更具现实意义. 这是因为以Loop代数为基础的Toda理论的Lax矩阵谱曲线[11]与Seiberg-Witten理论中四维超对称规范理论的模参数所生成的椭圆曲线相一致, 从而为我们从可积系统中得到四维超对称规范理论的模参数和预势提供了一种方法. 基于这一点, 我们构造Loop代数上的Toda力学系统就具有重要的物理意义.

作者在前面的工作中曾对Loop代数$\mathscr{L}(D_r)$上具有长程相互作用的Toda力学系统进行推广, 构造出Loop代数$\mathscr{L}(D_r)$的Lax Pair L和M, 给出了这个系统的运动方程, 哈密顿结构及泊松括号[12].

本文给出Loop代数上的另一种Toda系统, 限定其Lax Pair中的M是反对称矩阵, 而$L=L^{+}+M,L^{+}$是准上三角矩阵(包括对角部分). 从普通李代数出发, 证明了此时的Lax方程$\dot{L}=[L,M]$能够精确求解, 然后将其求解思路延伸至Loop代数, 证明在这种系统中可以将Lax方程的求解问题转化为一个正则Riemann-Hilbert问题[13], 在特定的初值条件下系统是可积的. 并对一个实例进行了精确求解.

2 Riemann-Hilbert问题简介

Riemann-Hilbert问题原是1900年D.Hilbert在巴黎国际数学家会议上提出的23个问题之21. 问题如下, 假设在复变量λ的平面上给定一个闭合回路Γ, 同时还假设在此回路上给定一个矩阵(K阶)函数$G(\lambda)$. 要求构造一个在回路Γ内部解析的矩阵函数$\varphi_1(\lambda)$和一个在回路外部解析的矩阵函数$\varphi_2(\lambda)$, 并且要求$\varphi_1(\lambda)$和$\varphi_2(\lambda)$在此回路上满足下面条件:

2005 – 12 – 17 收稿

1) E-mail: zhuqiao@sust.edu.cn

$$\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)=G(\lambda), \tag{1}$$

当 $\det\varphi_1(\lambda)\neq 0$, $\det\varphi_2(\lambda)\neq 0$ 时, 这就是正则 Riemann-Hilbert 问题, 简称正则R-H问题.

3 普通李代数情形下的一种可积 Toda 系统

首先讨论普通李代数情况下的Lax方程:

$$\dot{L}(t)=[L(t),M(t)], \tag{2}$$

今后为简化记号, 时间 t 的函数 $F(t)$ 都简记为 F. 其中

$$L=M+L^{+}, \tag{3}$$

M 是反对称矩阵, 即 $M^{\mathrm{T}}=-M$, L^{+} 是准上三角矩阵 (对角元可以非零). 如果 (2) 式中的 L 和 M 是由 (3) 式的关系相联系的, 就可以证明这个系统是完全可积的. 令 (2) 式的初始条件为

$$L(0)=L_0.$$

前人的工作中曾给出如下的分解:

$$N=\mathrm{e}^{tL_0}=an, \tag{4}$$

其中 $a^{\mathrm{T}}=a^{-1}$, n 是准上三角矩阵.

$$\dot{N}N^{-1}=L_0=\dot{a}a^{-1}+a\dot{n}n^{-1}a^{-1}, \tag{5}$$

令

$$L=a^{-1}L_0a, \tag{6}$$

则 L 就是问题的解. 证明如下, 由以上两式有

$$L=a^{-1}\dot{a}+\dot{n}n^{-1}, \tag{7}$$

设 I 是单位矩阵,

$$aa^{-1}=I\Rightarrow \dot{a}a^{-1}+a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^{-1})=0,$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^{-1})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^{\mathrm{T}})=-a^{-1}\dot{a}a^{-1},$$

又由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^{\mathrm{T}})a=\dot{a}^{\mathrm{T}}(a^{-1})^{\mathrm{T}}=-a^{-1}\dot{a},$$

有

$$(a^{-1}\dot{a})^{\mathrm{T}}=-a^{-1}\dot{a},$$

即 $a^{-1}\dot{a}$ 反称. 由 (6) 式经计算可得

$$\dot{L}=[L,a^{-1}\dot{a}]. \tag{8}$$

另一方面, 可以证明 $\dot{n}n^{-1}$ 是准上三角的, 因此由 (7) 式和 (8) 式知道, (7) 式的 L 正是系统的解. 在以下证明 (4) 式的分解问题可以化为有限个代数方程的求解问题, 也就是证明这个系统是完全可积的. 考虑方程

$$N^{\mathrm{T}}N=n^{\mathrm{T}}a^{\mathrm{T}}an=n^{\mathrm{T}}n. \tag{9}$$

上式两边都是对称矩阵, 设是 $K\times K$ 矩阵, 则准上三角矩阵 n 一共有 $\dfrac{1}{2}K(K+1)$ 个非零矩阵元, 它们是要求解的未知数. 而对已知矩阵 N, 求解方程 (9) 时也只有 $\dfrac{1}{2}K(K+1)$ 个独立的代数方程, 因此方程 (9) 有相同的未知量数目和独立方程的数目, 理论上可以得到分立的解, 得到 n, 然后得到 $a=Nn^{-1}$, 所以这是一个可积问题.

矩阵 N 已知, 是因为矩阵 L_0 已知, 可以将其对角化 (而对角化的步骤是可以由有限个代数方程完成的), $L_0=S^{-1}\overline{L}_0S$, 其中 $\overline{L}_0$ 是对角矩阵, 就可以得到 N:

$$N=\mathrm{e}^{tL_0}=\mathrm{e}^{tS^{-1}\overline{L}_0S}=S^{-1}\mathrm{e}^{t\overline{L}_0}S.$$

4 Loop 代数情形下的求解问题

将前人的上述思想推广至Loop群, 考虑中心为零的Loop代数. 对于 $K\times K$ 的矩阵, 可以令它的根高 (grad) 是普通李代数的根高 $+k\times(2K-1)$, k 是 λ 的幂次, λ 是Loop代数的谱参数. 例如: $K=3$ 时,

$$\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\text{根高为}0,\quad \begin{pmatrix}0&&\\0&0&\\\lambda&0&0\end{pmatrix}\text{根高为}-2+1\times5=3.$$

在Loop代数情形可以取一个矩阵的 $\tilde{\mathrm{T}}$ 转置, 它是指先做普通转置然后再对所有矩阵元做 $\lambda^{k}\longleftrightarrow\lambda^{-k}$ 的变换. 如

$$\begin{pmatrix}0&0&\lambda\\&0&0\\&&0\end{pmatrix}^{\tilde{\mathrm{T}}}=\begin{pmatrix}0&&\\0&0&\\\lambda^{-1}&0&0\end{pmatrix}.$$

设有矩阵 A, B, $\mathrm{grad}A=a$, $\mathrm{grad}B=b$, 则有以下性质:

1) $\mathrm{grad}A^{\tilde{\mathrm{T}}}=-a$,

2) $\mathrm{grad}(A+B)\begin{cases}=a & (a=b)\\ \text{无确定根高} & (a\neq b)\end{cases}.$

3) $\mathrm{grad}(AB)=a+b$.

对一般的不具有确定高度的矩阵, 也用同样方式定义它们的 $\tilde{\mathrm{T}}$ 转置. 这种情况下的反称矩阵和准上三角矩阵的定义也与通常情况稍有不同, 简介如下:

1) 反称矩阵. Loop代数中的反称矩阵要求$A^{\tilde{\mathrm{T}}}=-A$.

2) 准上三角矩阵. 当A没有确定根高时, 要知道它是不是准上三角矩阵, 可以将其分解为一些有确定根高的矩阵之和:

$$A=A_1+A_2+\cdots,$$

求出它们的根高:

$$\mathrm{grad}A_1=a_1,\quad \mathrm{grad}A_2=a_2,\ \cdots,$$

当所有$a_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots)$时, A就是准上三角矩阵. 由此我们知道Loop代数中的准上三角矩阵是由λ的幂次为零的准上三角矩阵元(可有对角元)以及λ的幂次大于零的所有矩阵元组成的矩阵.

明确了以上的性质及概念, 来讨论Loop代数中Lax方程的求解问题. 考虑L和L_0中都有λ,即都是λ的函数. 假设L_0是由$\lambda^{\pm k}$的多项式做矩阵元的矩阵. 仍旧令

$$N=\mathrm{e}^{tL_0}=an, \tag{10}$$

其中$a^{\tilde{\mathrm{T}}}=a^{-1}$, n是Loop群的准上三角矩阵. 就可以仿照普通李代数情况下的推论, 给出Lax方程

$$\dot{L}=[L,M], \tag{11}$$

的解. 其中

$$L=a^{-1}\dot{a}+\dot{n}n^{-1}=M+L^{+}, \tag{12}$$

L^{+}是准上三角的, $M^{\tilde{\mathrm{T}}}=-M$.

于是, Lax方程(11)式的初值问题$L(0)=L_0$的求解归结为求(10)式的分解.

$$N^{\tilde{\mathrm{T}}}N=n^{\tilde{\mathrm{T}}}n, \tag{13}$$

$\det n\neq 0$. 将回路Γ取为单位圆, 由n只含λ的零和正幂次知n在单位圆内解析而且有逆. 由Loop代数下转置矩阵的定义知$n^{\tilde{\mathrm{T}}}$含λ的零和负幂次, 因而$n^{\tilde{\mathrm{T}}}$在圆外解析而且有逆. L_0的矩阵元可以含λ的正、负、零幂次, 它在圆上解析. $N=\mathrm{e}^{tL_0}$可由矩阵L_0的对角化得到, 它也在单位圆上解析而且有逆. $N^{\tilde{\mathrm{T}}}=\mathrm{e}^{tL_0^{\tilde{\mathrm{T}}}}$同理, 则$N^{\tilde{\mathrm{T}}}N$在单位圆上解析而且有逆. 这些事实提示我们可以用求解正则R-H问题的方法解出n.

在本问题中须考虑以下几点:

(1) 求得(13)式的解n应该是在Loop代数意义下的准上三角矩阵;

(2) 求得(13)式的解中对时间是连续的分支, 才可以构成(7)式的L;

(3) 这个分支应满足初值条件$L(0)=L_0$.

以下首先解决第一个问题, 求解R-H问题

$$N^{\tilde{\mathrm{T}}}N=mn, \tag{14}$$

其中n在单位圆上连续和圆内解析并且在圆上和圆内有逆, 在这种情形下, n如果是Loop代数意义下的准上三角矩阵, 则n^{-1}也是准上三角矩阵. m在单位圆上连续和圆外解析并且在圆上和圆外有逆. 由于L_0是以$\lambda^{\pm k}$的多项式为矩阵元的矩阵, $N=\mathrm{e}^{tL_0}$在圆上解析, 所以上述R-H问题是有可能求解的.

继而分析, 如果有两个这样的解, 它们有什么关系. 令

$$N^{\tilde{\mathrm{T}}}N=m_1n_1=m_2n_2,$$

$B=n_1n_2^{-1}$, $B^{-1}=n_2n_1^{-1}$都存在于圆上及圆内. 在圆上,

$$m_1n_1=m_2B^{-1}n_1\Rightarrow m_1=m_2B^{-1}, m_1B=m_2,$$

考虑$B'=m_1^{-1}m_2$, B'在圆上及圆外解析. 在圆上, $B'=B$, 因此, $B'=B$是常数矩阵. 也就是, (14)式的两个解只差一个常数矩阵因子. 设想已经找到一个解,

$$\begin{aligned} N^{\tilde{\mathrm{T}}}N&=mn,\\ (N^{\tilde{\mathrm{T}}}N)^{\tilde{\mathrm{T}}}&=N^{\tilde{\mathrm{T}}}N=n^{\tilde{\mathrm{T}}}m^{\tilde{\mathrm{T}}}, \end{aligned} \tag{15}$$

而$m^{\tilde{\mathrm{T}}}$是由m经普通转置并令$\lambda^k\leftrightarrow\lambda^{-k}$而得到的矩阵, 因此$m^{\tilde{\mathrm{T}}}$是在圆内解析圆上连续并且在圆上和圆内有逆的矩阵, 类似地, $n^{\tilde{\mathrm{T}}}$是在圆外解析圆上连续并且在圆上和圆外有逆的矩阵, 所以, $n^{\tilde{\mathrm{T}}}m^{\tilde{\mathrm{T}}}$给出R-H问题的一个解. 由前面的分析, $m^{\tilde{\mathrm{T}}}=Bn$, B为有逆常数矩阵, 代入(15)式

$$N^{\tilde{\mathrm{T}}}N=n^{\tilde{\mathrm{T}}}Bn\Rightarrow(N^{\tilde{\mathrm{T}}}N)^{\tilde{\mathrm{T}}}=N^{\tilde{\mathrm{T}}}N=n^{\tilde{\mathrm{T}}}B^{\tilde{\mathrm{T}}}n=n^{\tilde{\mathrm{T}}}B^{\mathrm{T}}n,$$

由于在圆上, $n,n^{\tilde{\mathrm{T}}}$都有逆, 故$B^{\mathrm{T}}=B$. 可以求得常数矩阵b, 使$b^{\mathrm{T}}b=B$. 这样, 有

$$N^{\tilde{\mathrm{T}}}N=n^{\tilde{\mathrm{T}}}b^{\mathrm{T}}bn=(bn)^{\tilde{\mathrm{T}}}(bn),$$

这是一个R-H分解. 现在, 如果bn中λ的零幂次部分是准上三角的, 就完成了第一个问题, bn就是(13)式的解n. 也就是, 需要使(13)式中n的常数部分为准上三角的, 这才符合Loop群的准上三角要求. 将(13)式中的n按λ的不同幂次分解为一系列矩阵之和:

$$n=n^0+\lambda n^1+\lambda^2n^2+\cdots.$$

所有n^i都不含λ, 它是λ^i的系数矩阵(n^i中的i是上标). 希望n^0是准上三角的. 如果n^0不是准上三角的, 可以用一个常数矩阵C对其进行“校正”. 令C满足$C^{\mathrm{T}}C=1$, 则有

$$(n^{\tilde{\mathrm{T}}}C^{\mathrm{T}})(Cn)=n^{\mathrm{T}}n,$$

也就是, 当n是(13)式的解时, Cn也是(13)式的解. 对于$n'=Cn$来说, 它的常数部分就是Cn^0,有

$$((n^0)^{\tilde{\mathrm{T}}}C^{\mathrm{T}})(Cn^0)=(n^0)^{\mathrm{T}}n^0=D,$$

当(13)式解出之后, n^0就知道了. D已知, 且$D^{\mathrm{T}}=D$, 即D是对称矩阵, 将D进行高斯分解,

$$D=X^{\mathrm{T}}X,$$

要求X是准上三角的, 这个方程的求解是一个代数问题, 求解问题在普通李代数情形已有讨论, 解出X就是我们想要的Cn^0.

$$X=Cn^0\Rightarrow C=X(n^0)^{-1}.$$

$n'=Cn$在圆上连续圆内解析且在圆上和圆内有逆. n'的零幂次部分即常数部分n'^0是准上三角矩阵. n'符合所有要求, 也是R-H问题的解, 第一个问题得以解决. 令

$$a=\mathrm{e}^{tL_0}n'^{-1}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}a^{\tilde{\mathrm{T}}}a\;=\;&(n'^{-1})^{\tilde{\mathrm{T}}}(\mathrm{e}^{tL_0})^{\tilde{\mathrm{T}}}\mathrm{e}^{tL_0}n'^{-1}=\\&(n'^{-1})^{\tilde{\mathrm{T}}}N^{\tilde{\mathrm{T}}}Nn'^{-1}=\\&(n'^{-1})^{\tilde{\mathrm{T}}}n'^{\tilde{\mathrm{T}}}n'n'^{-1}=1,\end{aligned} \tag{17}$$

得到满足我们要求的解, 所以又可以得到满足相应要求的a矩阵.

现在考虑第二个问题, 满足要求的解是不是唯一呢? 设有n_1和n_2都满足(13)式, 由上所述, 它们可由一常数矩阵B联系: $n_1=Bn_2$, $B=n_1n_2^{-1}$. B, $n_1^{\tilde{\mathrm{T}}}$, n_1在圆上都有逆, $B^{-1}=n_2n_1^{-1}$. 在单位圆上有

$$n_1^{\tilde{\mathrm{T}}}n_1=n_2^{\tilde{\mathrm{T}}}B^{\mathrm{T}}Bn_2=n_2^{\tilde{\mathrm{T}}}n_2=N^{\tilde{\mathrm{T}}}N\Longrightarrow B^{\mathrm{T}}=B^{-1},$$

令

$$\begin{aligned}n_1\;=\;&n_1^0+\lambda n_1^1+\lambda^2n_1^2+\cdots,\\n_2\;=\;&n_2^0+\lambda n_2^1+\lambda^2n_2^2+\cdots,\end{aligned}$$

即n_1^0, n_2^0是准上三角矩阵. 当$\lambda\to 0$时, $n_1\to n_1^0$, $n_2\to n_2^0$, 因此

$$n_1^0=Bn_2^0\Rightarrow B=n_1^0(n_2^0)^{-1},$$

准上三角的常数矩阵n_2^0的逆仍是准上三角的, 且两个准上三角矩阵的积也是准上三角的. 故B是准上三角的常数矩阵. 由$B^{\mathrm{T}}=B^{-1}$有$B=B^{\mathrm{T}}=B^{-1}$只能是对角元为±1的对角矩阵. 因此, 可以求出(13)式中对时间连续的几个分支, 解决第二个问题. 由(10)式:

$$a=\mathrm{e}^{tL_0}n^{-1},$$

由方程:

$$\dot{L}=[L,M],$$

根据前面的构造, 有

$$L(t)=a^{-1}L_0a=n\mathrm{e}^{-tL_0}L_0\mathrm{e}^{tL_0}n^{-1}=nL_0n^{-1}. \tag{18}$$

当$t\to 0$时, 对于一般的$L(0)=L_0$, 满足(18)式的n只能是$n\propto I$, 又由于B的限制, $n(0)$只能是$\pm I$. 虽然n的取值有两种情况, 但这并不影响

$$L=a^{-1}\dot{a}+\dot{n}n^{-1} \tag{19}$$

的唯一性. 因为此式的每一项都是相差$(-1)^2=1$这个因子, 因此不变, 即L的分解形式唯一. 所以, 当完成$n=n(t)$, $a=a(t)$的计算之后, 只要取$n(0)=a(0)=I$的分支(n和a都是t的解析函数), 就可以得到要求的解了. 这就解决了第三个问题.

到此, 证明了Loop代数下的Lax方程的求解问题可以用求解正则R-H问题的方法来解决.

5　求解Lax方程的一个例子

以下, 给定Lax方程的初值问题来具体求解. 当L是对称矩阵时, 按照以上提供的思路, 将得到精确解. 考虑lax方程

$$\dot{L}=[L,M],$$

的初值问题

$$L_0=L_0^{\tilde{\mathrm{T}}}=\begin{pmatrix}0&\lambda\\\lambda^{-1}&0\end{pmatrix},$$

$$N=\mathrm{e}^{tL_0}=an,$$

$a^{\tilde{\mathrm{T}}}=a^{-1}$, n是准上三角矩阵.

$$N^{\tilde{\mathrm{T}}}N=\mathrm{e}^{tL_0^{\tilde{\mathrm{T}}}}\mathrm{e}^{tL_0}=\mathrm{e}^{2tL_0}=n^{\tilde{\mathrm{T}}}n, \tag{20}$$

来解这样的R-H问题.

首先将L_0对角化,

$$L_0=S^{-1}\overline{L_0}S,$$

其中对角矩阵

$$\overline{L_0}=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix},$$

考虑到归一化, 矩阵

$$S^{-1}\;=\;\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-\lambda\\\lambda^{-1}&1\end{pmatrix},$$

$$S\;=\;\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&\lambda\\-\lambda^{-1}&1\end{pmatrix},$$

$$G=N^{\tilde{\mathrm{T}}}N=S^{-1}\mathrm{e}^{2t\overline{L_0}}S=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(2t) & \lambda\mathrm{sh}(2t)\\ \lambda^{-1}\mathrm{sh}(2t) & \mathrm{ch}(2t)\end{pmatrix}.$$

$G=G^{\tilde{\mathrm{T}}}$ 是对角矩阵. 设准上三角矩阵

$$n=\begin{pmatrix}n_{11}^0+\lambda n_{11}^1 & n_{12}^0+\lambda n_{12}^1\\ \lambda n_{21}^1 & n_{22}^0+\lambda n_{22}^1\end{pmatrix},$$

则

$$F=n^{\tilde{\mathrm{T}}}n=\begin{pmatrix}F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{pmatrix},$$

其中

$$F_{11}=(n_{11}^0)^2+(n_{11}^1)^2+(n_{21}^1)^2+\lambda^{-1}n_{11}^1n_{11}^0+\lambda n_{11}^1n_{11}^0,$$

$$\begin{aligned}F_{12}=&\ n_{11}^0n_{12}^0+n_{11}^1n_{12}^1+n_{21}^1n_{22}^1+\\&\lambda^{-1}(n_{11}^1n_{12}^0+n_{21}^1n_{22}^0)+\lambda n_{11}^0n_{12}^1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{21}=&\ n_{11}^0n_{12}^0+n_{11}^1n_{12}^1+n_{21}^1n_{22}^1+\\&\lambda^{-1}n_{11}^0n_{12}^1+\lambda(n_{11}^1n_{12}^0+n_{21}^1n_{22}^0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{22}=&\ (n_{12}^0)^2+(n_{12}^1)^2+(n_{22}^0)^2+(n_{22}^1)^2+\\&\lambda^{-1}(n_{12}^1n_{12}^0+n_{22}^1n_{22}^0)+\lambda(n_{12}^1n_{12}^0+n_{22}^1n_{22}^0).\end{aligned}$$

由(20)式有, $G=F$, 则它们的对应矩阵元应相等, 由于(20)式等号两边都是对称矩阵, 所以我们只考虑准上三角的矩阵元, 得到以下的七元方程组:

$$(n_{11}^0)^2+(n_{11}^1)^2+(n_{21}^1)^2=\mathrm{ch}(2t),\tag{21}$$

$$n_{11}^1n_{11}^0=0,\tag{22}$$

$$n_{11}^0n_{12}^0+n_{11}^1n_{12}^1+n_{21}^1n_{22}^1=0,\tag{23}$$

$$n_{11}^1n_{12}^0+n_{21}^1n_{22}^0=0,\tag{24}$$

$$n_{11}^0n_{12}^1=\mathrm{sh}(2t),\tag{25}$$

$$(n_{12}^0)^2+(n_{12}^1)^2+(n_{22}^0)^2+(n_{22}^1)^2=\mathrm{ch}(2t),\tag{26}$$

$$n_{12}^1n_{12}^0+n_{22}^1n_{22}^0=0.\tag{27}$$

求解该七元方程组得

$$n_{11}^0=[\mathrm{ch}(2t)]^{\frac{1}{2}},\quad n_{12}^1=\frac{\mathrm{sh}(2t)}{[\mathrm{ch}(2t)]^{\frac{1}{2}}},\quad n_{22}^0=[\mathrm{ch}(2t)]^{-\frac{1}{2}},$$

$$n_{11}^1=n_{21}^1=n_{22}^1=n_{12}^0=0.$$

由此可写出矩阵n:

$$n=\begin{pmatrix}[\mathrm{ch}(2t)]^{\frac{1}{2}} & \lambda\dfrac{\mathrm{sh}(2t)}{[\mathrm{ch}(2t)]^{\frac{1}{2}}}\\ 0 & [\mathrm{ch}(2t)]^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\quad \det n=1.$$

由$N=an\Rightarrow a=Nn^{-1}$得

$$a=\frac{1}{[\mathrm{ch}(2t)]^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(t) & -\lambda\mathrm{sh}(t)\\ \lambda^{-1}\mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t)\end{pmatrix},\quad \det a=1.$$

$$L=a^{-1}L_0a=\frac{1}{\mathrm{ch}(2t)}\begin{pmatrix}\mathrm{sh}(2t) & \lambda\\ \lambda^{-1} & -\mathrm{sh}(2t)\end{pmatrix}=L^{\tilde{\mathrm{T}}}.$$

到此, 求得了Loop代数下Lax方程的精确解. 根据前面的思路, 矩阵

$$M=a^{-1}\dot{a}=\frac{1}{\mathrm{ch}(2t)}\begin{pmatrix}0 & -\lambda\\ \lambda^{-1} & 0\end{pmatrix},$$

经计算知, 所求得的L, M满足Lax方程$\dot{L}=[L,M]$. 按照这个例子的思路, 可以构造一些能精确求解的Loop代数上的Toda系统的初值问题.

6 结论

本文对Loop代数上Toda模型的Lax pair中的M做出限制(即满足(3)式), 证明这时的Lax方程求解问题可转化为相关的正则R-H问题. 可以用求解正则R-H问题的方法求解给定的初值问题下的Lax方程. 本文的思路可以用来解L_0中含$\lambda^{\pm k}$这一类相关的某些初值问题. 今后还可以进一步考虑, 当在Loop代数生成元的对易关系中添加中心项时, 是否能推广.

参考文献(References)

1 Toda M J. Phys. Soc. Japan, 1967, **23**: 501—506

2 Castro-Alvaredo O A, Fring A. Applications of Quantum Integrable Systems. arXiv:hep-th/0301102

3 JIANG Jin-Huan, LI Ai-Min, LI Zi-Ping. HEP & NP, 2003, **27**(6): 489—492(in Chinese)
(江金环, 李爱民, 李子平. 高能物理与核物理, 2003, **27**(6): 489—492)

4 YANG Zhan-Ying, ZHEN Yi. HEP & NP, 2000, **24**(6): 484—489(in Chinese)
(杨战营, 甄翼. 高能物理与核物理, 2000, **24**(6): 484—489)

5 YANG Zhan-Ying, ZHAO Liu, ZHEN Yi. HEP & NP, 2000, **24**(4): 1—7(in Chinese)
(杨战营, 赵柳, 甄翼. 高能物理与核物理, 2000, **24**(4): 1—7)

6 Nirov K S, Razumov A V. Higher Symmetries of Toda Equations. arXiv:hep-th/0210136

7 Toda M. Prog. Theor. Phys. Suppl., 1970, **45**: 174—200

8 Moser J. Adv. Math., 1975, **16**: 197—220; Birkhauser. Basel, Prog. in Math., 1980, **8**: 233—289

9 Ruijsenaars S N M. Commun. Math. Phys., 1987, **110**: 191—213

10 LIU Wang-Yun, YANG Zhan-Ying, ZHAO Liu. HEP& NP,

2004, **28**(4): 359—364(in Chinese)
(刘王云, 杨战营, 赵柳. 高能物理与核物理, 2004, **28**(4): 359—364)

11 ZHAO Liu, LIU Wang-Yun. Commun. Theore. Phys., 2004, **42**: 9—18

12 ZHU Qiao, YANG Zhan-Ying, SHI Kang-Jie. HEP & NP, 2005, **29**(1): 19—22(in Chinese)
(朱桥, 杨战营, 石康杰. 高能物理与核物理, 2005, **29**(1): 19—22)

13 HUANG Lie-De. Advances in Mathematics, 1990, **19**(2): 265—283(in Chinese)
(黄烈德. 数学进展, 1990, **19**(2): 265—283)

Study of Solving a Toda Dynamic System with Loop Algebra

ZHU Qiao[1;1)]　YANG Zhan-Ying[2]　SHI Kang-Jie[3]　WEN Jun-Qing[4]

1 (Institute of Science, Shaanxi University of Science & Technology, Xianyang 712081, China)
2 (Department of Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)
3 (Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)
4 (Institute of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China)

Abstract In this paper, we construct a Toda system with Loop algebra, and prove that the Lax equation $\dot{L}=[L,M]$ can be solved by means of solving a regular Riemann-Hilbert problem. In our system, M in Lax pair is an antisymmetrical matrix, while $L=L^{+}+M$, and L^{+} is a quasi-upper triangular matrix of loop algebra. In order to check our result, we exactly solve a R-H problem under a given initial condition as an example.

Key words Toda many body mechanics system, Lax Pair, regular Riemann-Hilbert problem

Received 17 December 2005

1) E-mail: zhuqiao@sust.edu.cn